京都・顕真学苑論文集
（副題：カルナップと幾何学とに基づく数理哲学）

Kyoto-Kenshingakuen Collected Papers

The Mathematical Philosophy Based on Carnap and Geometry

第三論文

カルナップの時空論における函手概念――層理論による三段の解釈

（２００７年１月執筆）

the third paper

Functor in Carnap's Theory of Space-time
—– Three Interpretations by Sheaf Theory

「カルナップの時空論における函手概念――層理論による三段の解釈」の仏教的背景

The Buddhistic Background of “Functor in Carnap’s Theory of Space-time —– Three Interpretations by Sheaf Theory”

京都・顕真学苑副幹（顕真）
the subeditor at Kyoto-Kenshingakuen (Kenshin)

Abstract

The Buddhistic background of this paper is the following phrase in Samyuktāgama: “All samskārāh are anitya (impermanence). All dharmāh are anātman (non-substantiality). Nirvāna is quiescence (śānta),” that is, the seal of three laws. The world has duality of dynamic samskārāh and static dharmāh. In the True Pure Land

Sect, all sentient beings (sattva) are regarded as vacant space (ākāśa) of non-birth and non-death. “Birth in the Pure Land of Amitābha-buddha” is the truth that transcends the two extreme views of eternalism and nihilism, viz., “Birth of Non-Birth.” Functor in this paper, “Functor in Carnap’s Theory of Space-time —— Three Interpretations by Sheaf Theory,” also represents the duality of dynamism and stillness: the unification of antithetical concepts. Dynamism hides itself behind stillness. Carnap’s functor is beyond the set theoretical concept of mapping. It represents the functional side of function. This paper discloses for the first time three types of interpretations of Carnap’s theories of space-time in his two literatures by means of functors in sheaf theory. One of the reasons why I propose three kinds of interpretations originates in the Buddhistic background, viz., the seal of three laws.

本論文「カルナップの時空論における函手概念——層理論による三段の解釈」（２００７年１月執筆）の背景には、次の文、すなわち三法印がございます。「一切行無常。一切法無我。涅槃寂静。」（『雑阿含経』巻十（大正二、六六　中下））「法」は「行」という動によって生じた静でございまして、世界には「行」の動と、動の作り出す「法」の静の、二面性がございます。加えまして、「法」は「縁起」によって生じるものでございます（「縁己生法」）。本論文で取り上げます函手概念は、「縁起」の関係性を表し、且つ「行」の動、動の上に現れる「法」の静の、二面性を示す概念、言うなれば、動を内に秘める静でございます。浄土真宗におきましても、衆生は無生無滅で虚空のようなものであり、浄土の生とは、断にもあらず常にもあらず、断常を拂ったところにあらわれる真理、不生の生とされております。

カルナップが世界構築のために作りました形式的言語体系の特質の一つは、函手(Funktor)概念の導入にあると私は考えます。函手概念に注目し、カルナップの時空論における函手と層(sheaf)理論における函手とのつながりを論じる研究は、私の見ます限り、これまでにはございません。しかし本論文は、カルナップの導入しました函手概念が、本人の意図しておりました以上の遥かな拡がりを持っているということ、彼の二種の文献における時空体系の殆どすべての概念が、多様体上の層の函手概念と層意味論の函手概念によって二通り、厳密には三段重ねに表現できるということ、を初めて示すものでございます。三段重ねに解釈いたしました理由の一つは、仏教的背景が三法印であるからということに基づいております。

カルナップの函手概念は、集合論における写像概念では正確には捉えきれない概念でございます。例えば２＋２＝４と２×２＝４とは、同じ元を対応させておりますので、写像としては同じでございますが、函手としては異なる種類

に属するものでございます。函手概念は、写像という集合論的概念を超え、より関数概念の本質に迫るものでございまして、関数の機能的側面を表現するという点におきまして、動を内に秘める静であると言うこともできます。函手概念には、動と静の二つの相反する特性があるのでございます。実際、カルナップの函手概念は、後にアイレンバークとマックレーンによって、圏(category)論における函手概念に発展します。現に、マックレーンの *Categories for the Working Mathematician* は、「函手」という言葉がカルナップの *Logische Syntax der Sprache* に由来するものであることを、明記しているのでございます。そして、前層の全体と準同型について、前層の圏が構成され、層の全体もまた、圏を作りますので、層理論と圏論とは、相関関係にあるのでございます。

本論文では、*Über die Abhängigkeit der Eigenschaften des Raumes von denen der Zeit* と *Einführung in die symbolische Logik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen* における時空関係が、終局的には層理論の函手概念に還元できることを、*Topoi* と *Sheaves in Geometry and Logic* を用いまして、先ず多様体上の座標近傍と同相写像によるその張り合わせ、つまり座標変換という微分幾何学の概念によって解釈し、次に層の制限・照合という代数幾何学の概念によって二段重ねに解釈し、更に層・圏・トポスによる層意味論によって解釈するという、三段重ねの解釈によって示します。本論文のために、ドイツ語の文献を七部、フランス語の文献を八部、英語の文献を八部、訳本のないものばかりを熟読いたしました。カルナップの時空論における函手を層理論における函手として再構成しますと、カルナップの構築する時空が、より「一般化された宇宙」として立ち現れます様子を、観察することができるのでございます。

京都・顕真学苑論文集
（副題：カルナップと幾何学とに基づく数理哲学）
Kyoto-Kenshingakuen Collected Papers
The Mathematical Philosophy Based on Carnap and Geometry

第三論文
カルナップの時空論における函手概念――層理論による三段の解釈
（２００７年１月執筆）
the third paper
Functor in Carnap's Theory of Space-time
―― Three Interpretations by Sheaf Theory

京都・顕真学苑副幹（顕真）
the subeditor at Kyoto-Kenshingakuen (Kenshin)

Abstract

Carnap's functor is beyond the set theoretical concept of mapping. It represents the functional side of function. The functors that Carnap introduced evolved into functors in category theory, and related to the development of homology in algebraic and differential topology, and connected with the advancement of sheaf theory. This paper discloses for the first time three types of interpretations of Carnap's theories of space-time in his two literatures by means of functors in sheaf theory. Carnap's theory of space-time, as posited in his paper of 1925, "Über die Abhängigkeit der Eigenschaften des Raumes von denen der Zeit," can be expressed by the sheaf of all smooth functions on a topological manifold, and the relations of his system of space-time can be reduced to functors in sheaf theory. First, his theory of space-time in his paper of 1925 is explained by coordinate neighborhood on topological manifold, atlas, diffeomorphism and coordinate change in differential topology. Second, it is interpreted by restriction-collation of continuous functions in sheaf theory, in the broad sense, in algebraic topology. Third, almost all the concepts of Carnap's theory of space-time, as put forth in his book of 1954, *Einführung in die symbolische Logik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen*, can be represented by functors in sheaf theory, using sheaves, categories, topoi and sheaf semantics. Finally, it is indicated that Poincaré's homologie in "Analysis Situs" was implicitly related with Carnap's functor.

はじめに

過去の遠い書物に埋もれていた概念が、長い年月を経て、新たな時と場所に蘇生することがある。その概念自体の持つ秘めたる目的は、通常は見過ごされ、表には現れない。カルナップの時空論における函手概念は、その様な概念の内の一つである。カルナップが世界構築のために作った形式的言語体系の特質の一つは、函手(Funktor)概念の導入にある、と私は考える。函手概念に注目して、カルナップの時空論における函手と層(sheaf)理論における函手との繋がりを論じた研究は、私の見る限り、これまでにはない。しかし本論文は、カルナップの導入した函手概念が、本人が意図した以上の遥かな拡がりを持っていて、彼の時空体系の殆どすべての概念が、層理論の函手概念によって表現できるということを、カルナップの二種の文献における時空論の、多様体上の層の函手と、層・圏・トポスを用いる層意味論の函手による、二通りの解釈を通じて、初めて示すものである。その内の第一の解釈は二段重ねであるため、これに第二の解釈を加えると、厳密には三段重ねである。本論文のために、ドイツ語文献七部、フランス語文献八部、英語文献八部、訳本のない文献ばかりを、長い年月をかけて熟読した。

カルナップの時空論が層理論における函手で二通り、厳密には三段重ねに表現可能であることを初めて示すことの哲学的意義は、カルナップが空間を考察し、それを論理学的言語で表現するにあたり、静的な集合論的世界を超えた、動的な函手概念を用いる、より一般化された世界を構成したという点が、空間を考察する学問、即ち幾何学における、函手としてのホモロジー概念の発展、並びにホモロジーを表現する言語としての圏、函手、層、トポスの概念の発展と重なり合い、静的な集合論的世界を超えた、より一般化された思索空間を作るという目的においては、ほぼ一致しているという、今まで隠されていた事実を初めて明らかにしたということにある、と私は考える。詳述するならば、カルナップは『空間』(1)、『物理学的概念形成』(2)、『世界の論理的構築』(3)、『言語の論理的構文論』(4)、『物理学の哲学的基礎』(5)等の著作において、リーマンやポアンカレ等の文献を用いて幾何学的考察を行っている。カルナップにとって、リーマンやポアンカレ等の同時代の幾何学研究の考察は、哲学研究に不可欠であり、彼の時空体系の構築の基盤をなすものである。そしてカルナップが自身の幾何学の研究に際して参考としたポアンカレは、リーマンとベッチ等の研究を基礎として、初めて位相空間におけるホモロジーの概念を定義している(6)。位相空間の構造を洞察するのに大いに役立つ代数的不変量が、ホモロジー群である。１９４０年以降、代数幾何学と位相幾何学との相互作用が主題になると共に、ホモロジー理論の公理化が進み、加群のホモロジー等のホモロジ

一代数が生まれ、圏と函手の概念が、代数位相幾何学とホモロジー代数を表現する言語としての役割を果たすようになる(7)。圏と函手の言語は、従来の集合論の言語では捉えきれない関係を、より抽象化された形で規定するものである。

ホモロジーは、位相空間に対して群を対応させるものであって、この対応関係を函手と呼ぶ。函手は、群の上にのみならず、群の準同型写像の上にも作用する。また、アーベル群のなす圏という概念から、ホモロジー代数が構成される(8)。チェイン複体とチェイン写像の圏から次数つき加群と次数０の準同型写像の圏への共変函手を、ホモロジー函手という。コホモロジーは導来函手であり、層のコホモロジーとは、層のなす圏からアーベル群のなす圏への大域切断の函手（左完全函手）の導来函手のことである(9)。そして層の概念の発展と共に、層係数を持つ位相空間の対応するコホモロジーを定義することが可能となり、層理論により、様々なコホモロジーが公式化される(10)。更にトポス理論は、位相幾何学、代数幾何学、特に層理論と、集合論、論理学を融合する理論であり、ホモロジー的手法を用いて、集合論的世界を超える「一般化された宇宙」(11)の構成を可能とするものである。一方カルナップは、リーマンやポアンカレ等の当時の最新の幾何学に基づく世界を、自分で作成した論理学的言語で表現しようとする際に、函手という概念を生成して、初めて導入している。幾何学を記述する論理学的言語の一部として函手を用いるという意図は、函手としてのホモロジーの手法を用いて集合論的世界を超える「一般化された宇宙」を構成するという意図と、目的としては同一のものである。異なる時と場所において、カルナップの空間構築と後世の幾何学的世界とが、ポアンカレのホモロジー論とカルナップの作成した函手という概念を通じて、静的な集合論的世界を超える動的な「一般化された宇宙」を構成するという同一の目的の下に、結合することが示される。

カルナップの函手概念は、集合論における写像概念では、正確には捉えきれない概念である。例えば、２＋２＝４と２×２＝４とは、同じ元を対応させているので、写像としては同じであるが、函手としては異なる種類に属する(12)。函手概念は、写像という集合論的概念を超えて、より関数概念の本質に迫るものであり、関数の機能的側面を表現する点において、動を内に秘める静である、と言うこともできる。函手概念には動と静の二面性があるのである。実際、カルナップの函手概念が、後にアイレンバークとマックレーンによって、圏論における函手概念に発展することは、歴史上記録された事実でもある。現に、マックレーンの１９９８年の文献(13)は、「函手」という言葉がカルナップの『言語の論理的構文論』に由来するものであることを、明記している。そして、前層の全体と準同型について、前層の圏が構成され、層の全体もまた、圏を作るので、層理論と圏論とは、相関関係にあるのである(14)。

函手概念の出現過程を見るために、カルナップの時空についての考察の潮流を瞥見する。先ずその考察は、１９２２年の学位論文『空間』に始まり、１９２５年の論文「空間特性の時間特性への依存について」(15)では、空間関係は時間関係に還元できると主張する。次いで、１９２８年の『世界の論理的構築』においては、基本関係をより高い段階に組み上げることによって、関係の体系としての世界構築を試みる。更に１９３４年の『言語の論理的構文論』において、二種の形式的言語と一般構文論を作成し、関係の概念を、函手と述語の概念に発展させる。そして１９５４年の『記号論理学入門、その応用への個別の考慮と共に』(16)にて、三種の形式的言語を構成し、その形式的言語においても函手概念を採用し、加えて、幾何学や物理学における時空体系を、自分の作ったそれらの形式的言語で表現することを試みる。一連の著作を読むと、カルナップの時空体系の構築の特質は関係性にあり、函手概念はその関係性を表現するために導入されたものであることが、看取できる。

この一連の著作の内、時空論を主題とする文献は、１９２５年の論文と１９５４年の文献であるが、１９２５年の論文における時空論は、関係Ｋ、Ｚ、Ｗで表現され、函手概念は未だ出現していない。１９５４年の文献における時空論は、一部は函手概念で表現されているものの、そのすべての概念が函手によって表現されている訳ではない。本論文は、カルナップの函手が後年発展したものとしての層理論の函手によって、この二つの時空論を解釈し、二通りに表現するものである。第一の解釈は二段重ねであるから、正確には三段重ねである。

本論文では、まず第一節において、１９２５年の論文「空間特性の時間特性への依存について」における時空論を解説し、第二節において、その時空関係を多様体上の層を用いて解釈し、時空関係が終局的には層理論の函手概念に還元できることを示す。これはカルナップの時空の層理論による第一の解釈である。この第一の解釈は、カルナップの時空体系を、先ず多様体上の座標近傍と同相写像によるその張り合わせ、つまり座標変換という微分幾何学の概念によって解釈し、更に層の制限と照合という代数幾何学の概念によって解釈するという、二段重ねの解釈である。第三節において、１９５４年の『記号論理学入門、その応用への個別の考慮と共に』で作成された言語による時空の構成に用いられる函手概念を説明し、第四節において、その時空の構成における殆どの概念が、層理論の函手概念によって表現できることを、層・圏・トポスによる層意味論を用いて示す。これはカルナップの時空の層理論による第二の解釈であり、先の二段重ねの解釈と合わせて、合計三段重ねの解釈となるのである。第五節において、カルナップが参考とした同時代の幾何学者ポアンカレが初めて導入したホモロジーの概念と、それと函手概念との関わりを説明する。カル

ナップの生み出した函手という概念自体の奥に秘められた価値を、白日の下にさらすことが、本論文の目的であり、カルナップの時空論における函手を、層理論における函手として再構成するならば、カルナップの構築する時空が、更に「一般化された宇宙」として立ち現れる様を、観察することができるのである。

一、１９２５年の論文でのカルナップの時空における関係Ｋ、Ｚ、Ｗ

　１９２５年のカルナップの論文「空間特性の時間特性への依存について」においては、一つの時間座標と三つの空間座標を四軸から成る一つの座標体系に統合し、外世界の出来事の全体を四次元世界として表現する。一瞬の世界の状態は、この四次元世界の三次元の横断面とされる。粒子の点の出来事(Punktereignis)を表現する世界点と、四次元世界における粒子の世界線が形成される。同じ瞬間横断面(Augenblicksquerschnitt)に属する世界点の集合は、空間クラスとされる。或る空間クラスに、各々の世界線から唯一つの世界点が属する。空間とは空間クラスの世界点の配列であると理解される。世界線の点の時間配列は、列配列である。一本の世界線の世界点 a ともう一本の世界線の点 b とが重なるように二本の世界線が交差する場合、a は b と併発(Koinzidenz)するという。併発はトポロジー的関係であり、空間的重なりも時間的重なりも、距離的規定ではない。真の時間公理とは、時間配列と併発関係のみを扱うものとして理解される。カルナップは、空間トポロジーが真の時間公理から論理的に導出可能であることを主張する。

　時間トポロジーと空間トポロジーの構築において、世界点の間の二つの基礎関係から始め、それらの関係は K と Z と表される。関係(Relation)K の関連(Beziehung)は、併発関連である。即ち、aKb は、世界点 a が世界点 b と空間的時間的に重なることを表す。関係 Z の関連は、時間トポロジーの基礎関連であり、同じ世界線上の早い時間にあることを示す。即ち、cZd は、世界点 c と d が共通の世界線上にあり、c は時間的に d の前にあることを表す。時間トポロジーの構築は、K と Z についてその形式的諸特性を示す諸公理からの組み立てによって始まる：Z の推移性、非反射性、非対称性、K の対称性、Z と K の不一致性、等。どの公理も、K についてか、Z についてか、K と Z とについてかの形式的表現であるとされる。形式的概念とは、論理的概念と理解される。時間公理を記号論理の記号で表現する時、記号で表現された公理において、K 以外は論理的記号のみが生じるならば、それは K に関する形式的表現である。真の時間公理と時間配列の真の命題とに対する基準は、当該の命題は、K についてか、Z についてか、K と Z とについてかの形式的表現でなければならないとい

うことに存する。

aWb は、世界点 a と b との間に時間線分列があるということを表す。これは、a が最初の線分の始点で b が最後の線分の終点であるような、そして各々の線分の終点が次の線分の始点と一致するような、世界線の線分の列と理解される。aWb の意義は、a から物理的作用が b へ働くということである。異なる世界線の世界点の間の同時間性は、以下のように定義される。即ち、a と b とが同時間的であるとは、aWb でも bWa でもない場合である。

空間トポロジーを作成することができるためには、基礎概念として、空間的近隣関係の概念或いは周辺概念を必要とする。任意の空間クラスと、その中の任意の世界点 d を考える。d からの世界線を、時間的に早い世界点の方向にたどって、点 c、b、a を取り、aZb、bZc、cZd、更に aZd、bZd となるようにする。c に対して関係 W にある空間クラスの世界点のクラスを定め、それを c からの W 領域と名付ける。同様に、b からの W 領域と a からの W 領域を定める。d はこの三つの W 領域の各々に属し、c からの W 領域は、b からの W 領域の部分クラスであり、またそれは、a からの W 領域の部分クラスである。三つの W 領域は空間クラスの部分クラスである。空間クラスの内部に、世界点 d の同心円的周辺から、列を構成した。関係 W に基づく空間的点近傍(Punktumgebung)は、K と Z とに基づいて定義できる。それらは、空間トポロジーのハウスドルフの近傍公理を満たす。

この１９２５年の論文の段階においては、これらの関係が、明確な形式として公理化されている訳ではない。ＫＺ体系とW体系に伴う諸公理に関しては、１９２９年の文献の第二部第Ｃ章第３６節と第３７節(17)、更に洗練された形では、約３０年後の１９５４年の文献『記号論理学入門、その応用への個別の考慮と共に』の第二部第Ｄ章第４８節から第５１節(18)に亘って、形式的に記載されている。しかし、１９５４年の文献等における常識的な諸公理を、１９２５年の論文の体系に伴う諸公理として本論文に冗長に書き連ねることは、本論文の趣旨から外れるのみならず、１９２５年の論文の内容からも外れてしまうため、そのような混同は行わない。１９２５年の論文と１９５４年の文献は、本論文では独立した文献として、二種の論点と二通り、厳密には三段重ねの解釈で扱うべきものとする。

空間トポロジーは、K と Z についての形式的表現から構成され、真の時間公理から導出できる。空間トポロジーは、KZ 体系の一部門に過ぎず、挿入された併発関連を伴う時間トポロジーである。空間配列のトポロジー的特性は、時間配列のトポロジー的特性のみから導出できる。空間配列は、作用連結(Wirkungsverknüpfung)の配列である。三つの関係 K、Z、W を原素として、時空位相の物理学理論の公理体系のための哲学的基礎を論じることが、１９２５

年の論文の主旨である。

二、カルナップの時空の層理論による二段重ねの第一の解釈

カルナップの時空はミンコフスキー時空なので、時空は計量を持った四次元多様体であり、時空の計量は、適当な座標系において、$\eta_{\alpha\beta}$とすることができる。そして、カルナップの関係KとZとからなる関係Wの領域たちは、この多様体を被覆していると考えられる。多様体に限らず、位相空間の被覆とは、位相空間の部分集合の族について、その和集合がその位相空間全体となる場合をいう。各々のW領域をW_iと置く。W_iからR^nの中への同相写像ϕ_iを考え、その像をV_iとする。

この多様体は、W_iの像であるV_iたちを張り合わせることによって、作ることができる。具体的には、W_iとW_jとが交わる時、R^nの対応するV_iとV_jとは重なる。よって、ϕ_i（$W_i \cap W_j$)とϕ_j（$W_i \cap W_j$）とは、その間の同相写像$\phi_j \circ \phi_i^{-1}$によって張り合わされる。滑らかなn次元多様体がアトラスを持つn次元位相多様体であるのは、すべての写像$\phi_j \circ \phi_i^{-1}$が滑らかである場合である。

以上の構成は、層理論の函手によって表現可能である、と考える。まず、層の定義を述べる。『幾何学と論理学における層』、『トポイ』(19)によれば、層とは、位相空間X上の関数のクラスを記述する方法である。各々の関数$f : U \to R$の連続性は、局所的に定められる。第一に、Xの開部分集合U上に定義された連続関数fは、開部分集合$V \subset U$上の連続関数$f|_V$に制限することができる。第二に、Uが開集合U_iによって被覆され、関数$f_i : U_i \to R$がすべての$i \in I$に対して連続であるならば、すべてのiに対する制限$f|_{Ui} = f_i$を持つ多くとも一つの連続関数$f : U \to R$がある。更に、その様なfが存在するのは、様々な所与のf_iがすべての重複$U_i \cap U_j$上に整合する(match)場合、即ち、すべての$x \in U_i \cap U_j$とすべてのI上のiとjに対して$f_i x = f_j x$となる場合に限る。連続関数がこの第二の性質を持つ時、連続関数が一意的に照合可能(collatable)であるという。

この二つの性質は、関数Cによって表される。第一の性質は、以下の図式で表される：$C(U) = CU = \{f | f : U \to R \text{連続}\}$、$U \to CU$、$\{V \subset U\} \to \{CU \to CV、f \to f|_V \text{による}\}$。これは、関数Cを定義する。Cは、第一の性質を表現する函手である。

第二の性質については、開被覆$U = \cup U_i$に対して、関数$f_i : U_i \to R$、$i \in I$のIの指数を付けられた族は、積集合$\Pi_i CU_i$の要素である。そして、代入(assignment)$\{f_i\} \to \{f_i|_{Ui \cap Uj}\}$と$\{f_i\} \to \{f_j|_{Ui \cap Uj}\}$は、Iの指数を付けられた集合の($I \times I$)の指数を付けられた集合への二つの写像pとqを定義する。図式で

は以下の通りである：e：CU→Π_iCU_i、 p,q：Π_iCU_i→$\Pi_{i,j}$C（$U_i \cap U_j$）。

層とは、この図式がすべての被覆U＝∪U_i に対してイコライザ(equalizer)であるような函手Cのことである（イコライザについて少し説明する。Jを、二つの対象と、第一の対象から第二の対象への二つの恒等射ではない射からなる圏とする。函手F:J→CはCの平行する射からなる対f,g:b→aである。Fの極限対象dが存在すれば、それはfとgとのイコライザ、或いは差分核(difference kernel)と呼ばれる(20)）。以上が、層の定義である。

単純に説明すると、層とは、連続関数を局所的に制限し、そしてその制限を継ぎ合わせる(照合する、collate)函手である、と考えられる。

上記のカルナップの時空の構成においては、W_i 上のすべての滑らかな関数の層C_i と、W_j 上のすべての滑らかな関数の層C_j とは、$W_i \cap W_j$ に制限されると一致する。それ故、層C_i は、この多様体上の層Cに継ぎ合わされる。よって、カルナップの時空は、層理論の函手概念によって表現可能であることがここに示された、と考える。これがカルナップの時空の層理論による二段重ねの第一の解釈である。

三、１９５４年の文献でのカルナップの時空における既存の函手概念

１９５４年の『記号論理学入門、その応用への個別の考慮と共に』第二部第D章（１９６０年の第二版においては第二部第G章）における時空の構成は、１９２５年の「空間特性の時間特性への依存について」と本質的に変わらない、関係K、Z、Wによる体系である。その時空の構成においては、mem_1、init、sm_1、Z|W、mem、mem_2、sm_2 等の函手が用いられる。具体的な定義と使用法は、以下の通りである(21)。

例えば、関係Zが始項(Anfangsglied)も終項(Endglied)も持たないことは、函手initを用いて、

～∃(init(Z)). ～∃(init(Z^{-1})).

と表される。函手init(Z)は、Zの始項のクラスを表す。

Hがxより後の点yからW関係が至る空間Gのすべての点zの空でないクラスである(Hがxの後錐(Nachkegel)の内部点のクラスとGとの共通部分である)ことは、函手Z|Wを用いて、

Wgeb(H,x,G)≡Raum(G).[H=((Z|W)(x,—).G)].∃(H).

と表される。後錐について少し説明する。世界点と世界点との間に時間順序関係と併発関係が存する場合、その世界線の線分からなる連鎖を信号鎖(Signalkette)と呼ぶ。この時、鎖の始点と終点との間に作用関係(Wirkungsrelation)があるという。世界点が作用関係にある世界点のクラスを、

ミンコフスキーに従って、時間的前後関係により、前錐(Vorkegel)、後錐と呼ぶ。Raum は空間を表し、函手(Z|W)(x,—)は、x が—とWとＺの関係にあることを表す。

クラスＮが空間Ｇにおける空間点Ｆの近傍であることは、

Umgb(N,F,G)≡(∃x)(∃H)[Wgeb(H,x,G).(N⊂Rmp).sm_1(N)=H.N(F)].

と表される。Rmp は空間点を表し、函手 sm_1(N)はＮの連合クラス(Vereinigungsklasse)を表す。

時間関係 Wlin に始項と終項がないことは、函手 mem、mem_2、mem_1 を用いて、

Wlin(H)⊃(mem(H)⊂mem_2(H)).

Wlin(H)⊃(mem(H)⊂mem_1(H)).

と表される。函手 mem_1(R)は二項関係Ｒの第一項のクラスを表し、函手 mem_2(R)は二項関係Ｒの第二項のクラスを表し、函手 mem はＲの項のクラスを表す。

またＺは、Z=sm_2(Wlin).と表される。函手 sm_2 は、二項関係のクラスの連合関係(Vereinigungsrelation)である。

これらの函手以外には、連言記号.、選言記号∨、含意記号⊃、否定記号～、存在量化詞(∃x)、普遍量化詞(x)等が用いられる。これらの記号をも函手を用いて表現することは可能であり、その再構成には、この場合も再び層理論を必要とする、と考える。次節にて、その第二、厳密には三段目の解釈を試みる。

四、カルナップの時空の層理論による第二、厳密には三段目の解釈

層理論による再構成のために、最初に『幾何学と論理学における層』、『トポイ』に基づき、言葉の定義を説明する。まず、圏 C が小さい圏であるとは、対象の集まりC_0とモルフィズムの集まりC_1とが或る定められた域Ｕの集合である場合である(22)。モルフィズムとは、準同型或いは射など、数学的構造における何らかの写像を指す。圏 C^{op} をその逆(opposite)圏とする。Sets をすべての集合 S と T と関数 S→T の圏とする。$Sets^{C^{op}}$ とは、すべての函手 P: C^{op}→Sets と矢 P→P’とそれらの函手の間のすべての自然変換θ： P→P’とからなる函手圏である。

C 上の前層(presheaf)y(C)とは、y(C)=Hom_C(—,C)であるような、反変 Hom 函手である (${Hom}_C$(—,C)とは、定義域—、値域 C のモルフィズムの集まりを表す)。C から C 上の反変函手への函手 y: C→$Sets^{C^{op}}$, C→Hom_C(—,C)は、米田の埋め込みという(23)。

C 上の篩(sieve)S とは、函手圏 $Sets^{C^{op}}$ における副対象 S⊆y(C)である。S が C 上の篩であり、h: D→C が C への任意の矢であるならば、h^*(S)={g|cod(g)=D, hg∈S}は、D 上の篩である (cod(g)とは、モルフィズム g の値域を表す)。

圏 C 上のグロタンディークトポロジーとは、圏 C の各々の対象 C に対象 C 上の篩の集まり J(C)を以下のようにして割り当てる関数 J である。第一に、極大篩(maximal sieve)t_C={f|cod(f)=C}は J(C)の中にある。第二に、S∈J(C)ならば、任意の矢 h: D→C に対して h^*(S)∈J(D)である。第三に、S∈J(C)であり、そして R が、すべての h: D→C in S に対して h^*(R)∈J(D)であるような、C 上の任意の篩であるならば、R∈J(C)である。

サイト(site)とは、小さい圏 C と小さい圏 C 上のグロタンディークトポロジーJ からなる対(C,J)である(24)。サイト(C,J)上の層は圏を形成する。この場合、写像は自然変換即ち前層の写像である。グロタンディークトポスはサイト(C,J)上の層の圏 Sh(C,J)と同等な圏である(25)。このサイト(C,J)に対する層のトポスを ε とする。以上が、基本となる言葉の定義である。

層意味論においては、これらの言葉の定義に基づいて、以下の函手が構成される(26)。

y: C→$Sets^{C^{op}}$, a: $Sets^{C^{op}}$→Sh(C,J)=ε, i: Sh(C,J)=ε→$Sets^{C^{op}}$.

単純に説明すると、米田の補題により、ε における層 X に対して、モルフィズム yC→X, ayC→X は X の要素に対応するのである。即ち、次の同型写像が成り立つ。

X(C)≅Hom(yC,iX)≅Hom_{ε}(ayC,X).

層によって意味論を形式化するには、上の函手と同型写像と次の強制関係(forcing relation)C⊩ϕ(α)の定義が必要となる（α∈X(C)である)。即ち、C⊩ϕ(α)であるのは、第一にα∈{x|ϕ(x)}(C)、第二に、α: yC→X が{x|ϕ(x)}→X により因子に分解され、第三に、α: ayC→X が{x|ϕ(x)}→X により因子に分解される場合に限る。加えて、C⊩ϕ(α)であり、f: D→C ならば、D⊩ϕ(α・f)である。そして、{f_i: C_i→C}がすべての i に対して C_i⊩ϕ(α・f_i)であるようなトポロジーJ における被覆であるならば、C⊩ϕ(α)である。以上が、強制関係の定義である。

これらの定義に基づき(27)、連言記号、選言記号、含意記号、否定記号、存在量化詞、普遍量化詞は、上の函手と同型写像と強制関係とによって、以下のように形式化される。

C⊩ϕ(α).φ(α)であるのは、C⊩ϕ(α)かつ C⊩φ(α)である場合に限る。

C⊩ϕ(α)∨φ(α)であるのは、各々の指数 i に対して、C_i⊩ϕ(α・f_i)か C_i⊩φ(α・f_i)かのどちらかであるような被覆{f_i: C_i→C}がある場合に限る。

C⊩ϕ(α)⊃φ(α)であるのは、すべての f: D→C に対して、D⊩ϕ(α・f)が D⊩φ(α・f)を含意する場合に限る。

C⊩～ϕ(α)であるのは、すべての f: D→C (in 圏 C)に対して、D⊩ϕ(α・f)であるならば、空の族が D の被覆である場合に限る。

$C \Vdash (\exists y)\phi(\alpha, y)$であるのは、各々の指数 i に対して$C_i \Vdash \phi(\alpha \cdot f_i, \beta_i)$であるような C の被覆$\{f_i: C_i \to C\}$と要素$\beta_i \in Y(C_i)$がある場合に限る。
$C \Vdash (y)\phi(\alpha, y)$であるのは、すべての$f: D \to C$（ in 圏 C）とすべての$\beta \in Y(D)$に対して、$D \Vdash \phi(\alpha \cdot f, \beta)$がある場合に限る。
以上が層意味論における形式化であり、カルナップの時空は、この層による形式化を用いて、函手によって表現できる、と私は考える。カルナップの時空論と層理論とは、函手という共通の概念によって、結びつけることが可能である、と考えられる。これがカルナップの時空の層理論による第二、厳密には三段目の解釈である。先の二段重ねの第一の解釈と合わせて、三段重ねの解釈がここに示される。

五、ポアンカレのホモロジー論とその函手概念との関わり

このようにして、カルナップの１９２５年の論文と１９５４年の文献の二つの時空論の殆どすべての概念は、カルナップの函手の発展形態としての層理論の函手によって二通り、厳密には三段重ねに表現可能である、と考える。論理学的言語で幾何学を表現する場合、関数の機能的移行的性質を表現するには、集合論的な順序対(ordered-pairs)の概念より、函手概念が適しているのである。
結びとして、カルナップが参考とした同時代の幾何学者ポアンカレが、最初に導入したホモロジーの概念と、それと函手概念との関わりを説明する。ポアンカレのホモロジー概念は、１８９５年に出版された論文(28)に主に現れる。p 次元の多様体 V を考える。W が V の一部をなす q 次元（$q \leqq p$）の多様体であるとする。W の完全な境界が q－1 次元のλ個の連続な多様体 v_1、v_2、…、v_λからなるとする。これを記号 $v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda \sim 0$ で表現し、更に一般的に記号 $k_1v_1 + k_2v_2 \sim k_3v_3 + k_4v_4$（この場合、k は整数、v は q－1 次元の多様体）は、V の一部をなす q 次元の多様体 W が存在すること、そしてその完全な境界が、v_1 と僅かに異なる k_1 多様体、v_2 と僅かに異なる k_2 多様体、v_3 の逆多様体と僅かに異なる k_3 多様体、v_4 の逆多様体と僅かに異なる k_4 多様体からなることを意味する。この形式の関係をホモロジーと呼ぶ。ホモロジーは通常の方程式として組み立てられ、次の記号 $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_pv_p \sim w_1 + w_2 + \cdots + w_p$ もまた用いられる（多様体 w_1、w_2、…w_p は V の境界の一部をなす）。ポアンカレは凸多面体と同相である胞体からなる三角分割空間を考え、その上に同相写像の下で不変なホモロジーを、独立した概念として添加する(29)。
このポアンカレのホモロジー概念には、既に函手概念が内包されている。ホモロジーとは、位相空間に代数的不変量としてのホモロジー群を対応させることであるが、この対応関係は、集合間の写像というよりはむしろ、集合とは限

らない位相的対象を対応させる函手概念なのである。

本論文においては、カルナップが導入した函手概念が遥かな拡がりを持っていること、彼の関係理論による時空は、多様体上の層と、層・圏・トポスを用いる層意味論とによる、二通り、厳密には三段重ねの解釈によって、層理論の函手概念による時空に再構成可能であることを示した。リーマンやポアンカレの幾何学を論理学的言語で表現しようとしたカルナップが、函手概念を初めて導入し、それが後世に、ホモロジー代数を表現する圏と函手の言語、そして層の函手として復活したという事実は、今まで隠されていた事実であり、だからこそ意義深い事実である、と私は考える。大切なことは、カルナップの生み出した函手という概念自体の奥に秘められた価値を、闇から光に導き出すことであり、今まで誰も気付かなかったカルナップの函手概念の隠れた意義を書き記すことが、本論文の趣旨なのである。本論文は、カルナップの書いた過去の遠い書物に埋もれていた函手概念の秘めたる意義を捉え、それが層・圏・トポスという新たな時と場所に蘇生する様子を、初めて二通り、厳密には三段重ねの解釈で明るみにするものである。

註

(1) Rudolf Carnap, *Der Raum: Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre* (Berlin: Verlag von Reuther & Reichard, 1922).

(2) Carnap, *Physikalische Begriffsbildung* (Karlsruhe: Verlag G. Braun, 1926).

(3) Carnap, *Der Logische Aufbau der Welt* (Berlin-Schlachtensee: Weltkreis-Verlag, 1928).

(4) Carnap, *Logische Syntax der Sprache* (Wien: Verlag von Julius Springer, 1934).

(5) Carnap, *Philosophical Foundations of Physics* (New York: Basic Books, Inc., 1966).

(6) Henri Poincaré, “Sur l’Analysis Situs,” “Analysis Situs,” “Complément à l’Analysis Situs,” “Second Complément à l’Analysis Situs,” in *Œuvres de Henri Poincaré: Publiées sous les Auspices de l’Académie des Sciences par la Section de Géométrie* (Paris: Gauthier-Villars, Éditeur, 1953), Tome Ⅵ, pp. 189-288, 290-370 参照。

(7) Jean Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960* (Boston: Birkhäuser, 1989), p. 67; Roger Godement, *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux* (Paris: Hermann, 1958), pp.1-18, 90-106

参照。

(8) Richard G. Swan, *The Theory of Sheaves* (Chicago: The University of Chicago Press, 1964), pp. 1-89 参照。

(9) 但し、深谷賢治氏の示唆によれば、空間に対してそのホモロジーを対応させる函手は、どの函手の導来函手でもなく、層にそのコホモロジーを対応させる函手は、大域切断を取る函手の導来函手である。示唆の後半部については、Birger Iversen, *Cohomology of Sheaves* (Berlin: Springer-Verlag, 1986), pp. 91-2 等に同様の記述がある。

(10) Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory* (New York: Springer-Verlag, 1992), p. 2; Jean-Pierre Serre, "Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique," *Annales de l'Institut Fourier,* Tome Ⅵ (1955 et 1956), pp. 1-42 等参照。

(11) Mac Lane and Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, pp. 1, 267 参照。

(12) Robert Goldblatt, *Topoi: The Categorial Analysis of Logic* (Revised edn., Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1984), p. 212; Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, pp. 15, 51 参照。

(13) Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician* (2nd edn. New Yoyk: Springer-Verlag, 1998), p. 30 参照。

(14) John W. Gray, "Fragment of the History of Sheaf Theory," in M. P. Fourman, C.J. Mulvey, and D. S. Scott (eds.), *Applications of Sheaves: Lecture Notes in Mathematics 753* (Berlin: Springer-Verlag, 1979), pp. 1-79 参照。

(15) Carnap, "Über die Abhängigkeit der Eigenschaften des Raumes von denen der Zeit," *Kant-Studien* (Berlin), Bd. 30, H. 3/4 (1925), pp. 331-45.

(16) Carnap, *Einführung in die symbolische Logik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen* (Wien: Springer-Verlag, 1954).

(17) Carnap, *Abriss der Logistik, mit besonderer Berücksichtigung der Relationstheorie und ihrer Anwendungen* (Wien: Verlag von Julius Springer, 1929), pp. 80-7 参照。

(18) Carnap, *Einführung in die symbolische Logik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen,* pp. 169-83 参照。

(19) Mac Lane and Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, pp. 64-6; Goldblatt, *Topoi*, pp. 88-100, 359-68 参照。

(20) Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, p. 70 参照。

(21) Carnap, *Einführung in die symbolische Logik, mit besonderer*

Berücksichtigung ihrer Anwendungen, pp. 169-81 参照。
(22) Mac Lane and Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, pp. 11-12 参照。
(23) Ibid., pp. 24-6 参照。
(24) Ibid., pp. 109-10; Goldblatt, *Topoi*, pp. 206, 374-81, 385 参照。
(25) Mac Lane and Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, p. 127 参照。
(26) Ibid., p. 315 参照。
(27) Ibid., p. 316; Goldblatt, *Topoi*, pp. 386-8 参照。
(28) Poincaré, "Analysis Situs," in *Œuvres de Henri Poincaré*, Tome Ⅵ, pp. 193-288.
(29) Poincaré, "Complément à l'Analysis Situs," "Second Complément à l'Analysis Situs," in *Œuvres de Henri Poincaré*, Tome Ⅵ, pp. 290-370; "Analyse de ses Travaux Scientifiques," *Acta Mathematica*, 38 (1921), pp. 3-135; "Analyse des Travaux Scientifiques de Henri Poincaré Faite par Lui-même (*Acta Mathematica*, t. 38, 1921, p. 1-135). Première Partie: Équations Différentielles," in *Œuvres de Henri Poincaré: Publiées sous les Auspices de l'Académie des Sciences* (Paris: Gauthier-Villars et C[ie], Éditeurs, 1951), Tome Ⅰ, pp. ｉ－ｘｘｘｖ; Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*, pp. 3-157 等参照。