

京都・顕真学苑論文集
(副題：カルナップと幾何学とに基づく数理哲学)

Kyoto-Kenshingakuen Collected Papers
The Mathematical Philosophy Based on Carnap and Geometry

第六論文

カルナップの空間論の無限次元化と量子化——フレアーホモロジーを用いて
(2007年7月執筆)

the sixth paper

The Extension to Infinite Dimensions and Quantization of Carnap's Theory of Space,
by Means of Floer Homology

京都・顕真学苑法話・論文集の著作権は、京都・顕真学苑に帰属します。
著作権法上、京都・顕真学苑法話・論文集のすべて或いは一部の文書と画像の
無断転用、無断転載は、固くお断りいたします。

The copyright on *Kyoto-Kenshingakuen Collected Sermons and Papers* is held by
Kyoto-Kenshingakuen. All rights reserved.

Unauthorized borrowing and reproduction of all or part of the documents and images of
Kyoto-Kenshingakuen Collected Sermons and Papers are
strictly prohibited by the Copyright Law.

「カルナップの空間論の無限次元化と量子化
——フレアーホモロジーを用いて」の
仏教的背景

The Buddhistic Background of

“The Extension to Infinite Dimensions and Quantization of Carnap's Theory of Space,
by Means of Floer Homology”

京都・顕真学苑副幹 (顕真)
the subeditor at Kyoto-Kenshingakuen (Kenshin)

Abstract

The Buddhistic background of this paper is the world of lotus-treasury in
Sukhāvātī-vyūhopadeśa, composed by Vasubandhu. The world of lotus-treasury is the
Pure Land of Amitābha-buddha. It is said that, in this world of lotus-treasury, all

dharmadhātu are observed in each (paramāṇu-)rajas (Samantabhadra). Hence, this world includes infinite realms. This paper, “The Extension to Infinite Dimensions and Quantization of Carnap’s Theory of Space, by Means of Floer Homology,” explains for the first time that Carnap’s theory of space can be expanded to infinite dimensions and quantized by Floer homology, that is, $\infty/2$ dimensional homology. For this paper, I read *Gauge Theory and Topology* and *Symplectic Geometry* twice over from beginning to end.

本論文「カルナップの空間論の無限次元化と量子化——フレアーホモロジーを用いて」（2007年7月執筆）の仏教的背景は天親菩薩の『浄土論』における蓮華蔵世界、即ちお浄土でございます。普賢菩薩は、この蓮華蔵世界海においては、一々の微塵の中に、一切の法界を見る、と説かれていらっしゃいます。本論文「カルナップの空間論の無限次元化と量子化——フレアーホモロジーを用いて」は、カルナップの空間論が、フレアーホモロジー、即ち無限次元のホモロジーに基づいて、無限次元に拡張し得るものであり、且つ量子化できるものであることを、初めて示すものでございます。フレアーホモロジーとは、 $\infty/2$ 次元のホモロジー論であり、真に無限次元的な不変量でございます。本論文におきましては、蓮華蔵世界、即ちお浄土が仏教的背景でございますので、無限次元化と量子化とを行いました。本論文のために、『シンプレクティック幾何学』と『ゲージ理論とトポロジー』とを、それぞれ二回読了いたしました。

数学を学んだからといって、世上の利得がある訳ではございませんが、数学の価値は世俗の価値とはかけ離れた所にあつて、だからこそ尊いのでございます。聖なるものは、本来如何なるものも通い得ぬ筈の路を去来するのでございます。

京都・顕真学苑論文集
(副題：カルナップと幾何学とに基づく数理哲学)

Kyoto-Kenshingakuen Collected Papers
The Mathematical Philosophy Based on Carnap and Geometry

第六論文

カルナップの空間論の無限次元化と量子化——フレアーホモロジーを用いて
(2007年7月執筆)

the sixth paper

The Extension to Infinite Dimensions and Quantization of Carnap's Theory of Space,
by Means of Floer Homology

京都・顕真学苑副幹 (顕真)
the subeditor at Kyoto-Kenshingakuen (Kenshin)

Abstract

This paper explains for the first time that Carnap's theory of space can be expanded to infinite dimensions and quantized by Floer homology, that is, $\infty/2$ dimensional homology. Namely, Floer homology is infinite-dimensional invariant. In this paper, infinite-dimensional Morse theory as topological field theory and Riemann metric, etc. are applied to Carnap's topological space, which is based on one-dimensional relations and described by functors. Witten complex as topological field theory, cup product, Massey product, tree, and ribbon graph are used to construct the structure of space. It is also described by symplectic manifold, Lagrangian submanifold, Floer homology, and A^∞ -category with A^∞ -functor, and expanded to infinite-dimensional Morse theory and quantized. This paper intends to illustrate the paramount and maximum generalization of Carnap's concept of space by use of infinite-dimensional homology. The main literature interpreted in this paper are the following (except Carnap's literature): "Morse Homotopy and Its Quantization;" "Informal Note on Topology, Geometry and Topological Field Theory;" "Morse Homotopy, A^∞ -Category, and Floer Homologies;" "Floer Homology for 3 Manifolds with Boundary I;" *Symplectic Geometry, Gauge Theory and Topology*; "Morse Theory and Topological Field Theory;" *Differential Forms in Algebraic Topology*; *Œuvres de Henri Poincaré Tome VI*, etc.

はじめに

本論文は、カルナップの空間論が、フレアーホモロジー、即ち無限次元のホモロジーに基づいて、無限次元に拡張し得るものであり、且つ量子化できるものであることを、初めて示すものである。本論文は拙論「カルナップの時空論における函手概念——層理論による三段の解釈」の続編に当たるものであり、二論文とも、ホモロジー的手法を用いるという点で、一貫した流れの下にある。

拙論「カルナップの時空論における函手概念——層理論による三段の解釈」の趣旨は、カルナップが空間を考察して、それを論理的言語で表現するにあたり、静的な集合論的世界を超えた、動的な函手概念を用いる、より一般化された世界を構成したという点が、空間を考察する学問、即ち幾何学における、函手であるホモロジー概念の発展、並びにホモロジーを表現する言語としての圏、函手、層、トポスの概念の発展と重なり合い、静的な集合論的世界を超えた、より一般化された思索空間を作るという目的においては、ほぼ一致しているという事実を、初めて明らかにすることであった。異なる時と場所において、カルナップの空間構築と後世の幾何学的世界とが、ポアンカレのホモロジー論(1)とカルナップの作成した函手という概念を通じて、動的な「一般化された宇宙」(2)を構成するという同一の目的の下に結合することを初めて示すものであった。リーマンやポアンカレの幾何学を論理的言語で表現しようとしたカルナップが、函手概念を初めて導入し、それが後世に、ホモロジー代数を表現する圏と函手の言語、そして層の函手として蘇生したという事実は、今まで隠されていた事実であり、だからこそ意義深い事実である。

本論文の副題にあるフレアーホモロジーとは、 $\infty/2$ 次元のホモロジー論であり、真に無限次元的な不変量である。カルナップの空間的言語的構築が隠れた無限を包摂するという事実は、既に拙論『言語の論理的構文論』における無限と構成主義、拙論「カルナップの空間構築における七種の円環」、拙論「カルナップの言語構築における第三の無限の知恵の樹」において詳述している。本論文にてカルナップの空間論を、極めて大きな可能性を秘めた無限次元のホモロジーの手法を用いて表現することは、今まで全く試みられなかったことであり、集合論的世界を超えたより一般的な世界を構成するという、カルナップと現代幾何の共通の目的にも資するものと私は考える。本論文のために、『シンプレクティック幾何学』と『ゲージ理論とトポロジー』とを、それぞれ二回読了した。

カルナップの空間論を無限次元に拡張するためには、先ずそれを位相的場の理論として一般化する必要がある、と考える。またカルナップの空間論は、一次元の間隔を高階に組み上げる作業によって成立しており、また彼は物理的空間を、位相的空間関係において表現されるものとしているため、本論文におい

では、一次元の位相的場の理論を作ることが適当である、とも考える。

カルナップの空間論を位相的場の理論として詳述する文献は、私の見る限り、皆無である。しかし、カルナップは1922年の『空間』(3)や1926年の『物理学的概念形成』(4)や1954年の『記号論理学入門、その応用への個別の考慮と共に』(5)において、空間に位相的規定や計量的規定を与えており、また『空間』と『記号論理学入門、その応用への個別の考慮と共に』においては、位相的変換による不変量を取り上げて、位相的關係を特に重視している(6)。1925年の「空間特性の時間特性への依存について」(7)も、時空のトポロジーについての論文である。更に拙論「カルナップの時空論における函手概念——層理論による三段の解釈」にて詳述したように、カルナップの時空論と圏論との間には、透徹した関係がある。

本論文では、カルナップの一次元の関係に基づく位相的空間が、空間概念の一般化として正当であることを示し、それを新しく無限次元に拡張し、量子化する。カルナップの方法に即して、一次元の空間に、位相的場の理論としての無限次元のモース理論とリーマン計量等を与え、この構造を記述するために A^∞ 圏を用いる。第一節においては、カルナップの空間論における諸関係を解説する。第二節において、位相的場の理論としてのウィッテン複体と、カップ積とマッセイ積、リボングラフ、第三節において、 A^∞ 圏とフレアーホモロジーの要点を述べ、第四節にて量子化する。

一、カルナップの空間論における諸関係

カルナップの空間論とは即ち、関係論である。カルナップの『空間』、「空間特性の時間特性への依存について」、『物理学的概念形成』、『記号論理学入門、その応用への個別の考慮と共に』において空間に与えられる諸々の関係を、先ず確認する。

『空間』においては、関係の例として、すべての関数が挙げられる。関係の特性として、可逆性、対称性、推移性、一義性、多義性、多一義性(mehr-eindeutig)、一多義性、一一義性、同値性がある。列形成関係(reihenbildende Beziehung)に基づいて列が構成される。列には、順序数列、有理数列、実数列(Reihe der reellen Zahlen)等があり、列の列は二階列(Reihen zweiter Stufe)と呼ばれる。無制限の高階の列が形式的空間を構成し、空間は順序関係の構造とも呼ばれる。この構造における列形成関係に対する条件によって、位相的空間から、射影的空間と計量的空間とが形式的に生じる。但し物理的空間的形成物は、位相的空間関係において表現される。位相的形式による表現が、事実の表現を表す一般的な構造である。定曲率空間は、曲率が負、0、正であるならば、双曲的空間、

放物的空間、楕円の空間に分類される。度量規定の変更によって、空間が曲面から平面に転じるというのが、『空間』の主な論点である。

「空間特性の時間特性への依存について」においては、時間トポロジーと空間トポロジーの構築において、世界点の間の二つの基礎関係から始め、それらの関係は K と Z と表される。関係 (Relation) K の関連 (Beziehung) は、併発(Koinzidenz)関連である。即ち、 aKb は、世界点 a が世界点 b と空間的時間的に重なることを表す。関係 Z の関連は、時間トポロジーの基礎関連であり、同じ世界線上の早い時間にあることを示す。即ち、 cZd は、世界点 c と d が共通の世界線上にあり、 c は時間的に d の前にあることを表す。時間トポロジーの構築は、 K と Z についてその形式的諸特性を示す諸公理からの組み立てによって始まる： Z の推移性、非反射性、非対称性、 K の対称性、 Z と K の不一致性、等。 aWb は、世界点 a と b の間に時間線分列があるということを表す。これは、 a が最初の線分の始点で b が最後の線分の終点であるような、そして各々の線分の終点が次の線分の始点と一致するような、世界線の線分の列と理解される。異なる世界線の世界点の間の同時性は、以下のように定義される。即ち、 a と b とが同時的であるとは、 aWb でも bWa でもない場合である。空間配列は、作用連結(Wirkungsverknüpfung)の配列である。

『物理学的概念形成』においては、段階 n の特性の間の条件関係 (Bedingungsverhältnis)の存在は、段階 $n+1$ の概念の形成の原因を与え、ここでは、条件関係のある諸事物について述べられる新しい特性が立てられる。概念形成の高い段階の各々において、最初の段階に定めた特有の関係がある。物理的量を定義するために、二つの位相的規定と三つの計量的規定とを用いる。二つの位相的規定とは、数量的同一性 (Größenidentität) の規定、列形式 (Reihenform) と正方向の規定、三つの計量的規定とは、線分の等しさとスカラ形式 (Skalenform) の規定、0点 (Nullpunkt) の規定、数量単位 (Größeneinheit) の規定である。物理的量の位相的定義においては、或る領域の諸対象の間に、二つの関係がある。一つは推移的、対称的、一つは推移的、非対称的である。前者は同値概念の形成のため、後者は一次元的量の概念の形成のためである。世界点の物理的記述は $1\ 4$ の列から構成される。 4 の数は世界点を表し、 $1\ 0$ の数は物理的状態を示す。自然法則はこの表現方法によって、 $1\ 4$ の列の数の相互依存関係として表現できる。

『記号論理学概要、関係理論とその応用への個別の考慮と共に』(8)においては、関係 K 、 Z 、 W に基づく KZ 体系、 W 体系等の時空位相の公理体系が論じられ、関係理論が考察されている。『記号論理学入門、その応用への個別の考慮と共に』においても、 KZ 体系、 W 体系等の時空位相の公理体系に、上記の関係 K 、 Z 、 W が用いられ、時空位相における位相的方法も、関係の論理に基づいて

いる。位相幾何学や射影幾何学等の公理体系を記述する言語形式に、 mem_2 、 mem_1 、 sub_1 、 sm_1 、 kpl 、 clos 等の関手が用いられる。カルナップの導入した関手概念は、後にアイレンバークとマックレーンによって、圏論における関手概念に発展する。現に、マックレーンの1998年の圏論についての文献(9)は、「関手」という言葉がカルナップの『言語の論理的構文論』(10)に由来するものであることを、明記している。

要するに、カルナップの空間論は、基本的に一次元の関係の組み合わせによって成立し、それに対する定義として、位相的規定や計量的規定が与えられる。ただ物理的空間の表現には、位相的形式による表現が一般的であるとされる。そして空間を記述する言語形式には、関手が用いられる。この様な一次元の位相的空間が、空間概念の一般化として正当であり、その構成が無限次元に拡張し得ることを、次節以降に示す。二節、三節、四節は、註(11)、(12)、(13)の文献、主に深谷賢治氏の文献を典拠とし、カルナップの空間論に応用するものである。

二、ウィッテン複体、カップ積、マッセイ積、リボングラフ

先ず、カルナップの方法に沿って、位相的規定を与えるべく、位相的場の理論として、ウィッテン複体を構成する(11)。これを一次元の諸関係から構成するために、一次元空間から多様体への写像空間を導入する。多様体 M とその上の関数 f を考える。外微分 df が 0 となる、つまり1階微分が消える点のことを臨界点と呼ぶ。臨界点 p が非退化であるとは、ヘッセ行列が可逆であること、つまり2階微分が消えないことをいう。すべての臨界点が非退化であるような関数をモース関数という。 $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ をモース関数とする。これは、非退化な臨界点 p に対してその回りの座標系 x_1, \dots, x_n をうまく取って

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \text{ 或いは } f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k -x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2$$

となる。ここで k はヘッセ行列の負の固有値の数で臨界点 p のモース指数である。

カルナップのように計量的規定を与えるべく、多様体 M 上にリーマン計量を与え、モース関数 f の勾配ベクトル場を $-\text{grad } f$ とする。リーマン計量とは、各点 p に対してその接空間 $T_p(M)$ 上の正定値な計量 $g_{M,p}: T_p(M) \otimes T_p(M) \rightarrow \mathbf{R}$ で p に滑らかに依存するものを与えるものである。 $\text{grad } f$ とは1形式である df に対応するベクトル場であり、関数 f の値が変化する割合をベクトル場によって表現したものである。 $\text{grad } f$ は f が一定の値を取る M 内の各等位面に直交し、 f が各方向に増加する割合をその方向の成分とするようなベクトル場のことをいう。モース関数 f の臨界点の集合は、

$$\text{Cr}(f) = \{p \in M \mid df(p) = 0\}$$

とされる。p の近傍で

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k -x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2$$

ならば、p は臨界点である。μ(p) をモース指数（ヘッセ行列の負の固有値の個数）とする。臨界点 p, q ∈ Cr(f) に対して、モジュライ空間を

$$M(p, q) = \{l : \mathbb{R} \rightarrow M \mid dl/dt = -\text{grad } f, \lim_{t \rightarrow -\infty} l(t) = p, \lim_{t \rightarrow +\infty} l(t) = q\}$$

と定義する。l は l : ℝ → M なる曲線である。M(p, q) は多様体であり、その次元は、

$$\dim M(p, q) = \mu(p) - \mu(q)$$

である。（元の数数を数えるには、これが 0 次元である必要がある。）モース関数 f に対してウィッテン複体 C(M, f) を

$$C_k(M, f) = \bigoplus_{\mu(p)=k, p \in \text{Cr}(f)} \mathbb{Z}[p] \quad (\text{モース指数 } k \text{ の臨界点の数と同じ生成元の自由アーベル群})$$

と定義する。この上に写像 δ : C_k(M, f) → C_{k-1}(M, f) を

$$\delta [p] = \sum_{\mu(q) < \mu(p)} \delta [p, q] [q]$$

$$\delta [p, q] = \# \underline{M}(p, q) \quad (\underline{M}(p, q) = M(p, q) / \sim) \quad (\# \text{ は数数を数えることを表す})$$

と定義する。(C(M, f), δ) はチェイン複体、即ち δ δ = 0 を満たすものである。そのホモロジーは多様体 M のホモロジーと標準的に同型である。このウィッテン複体 (C(M, f), δ) の構成が、位相的場の理論である。この複体が、チェインホモトピーを除いてモース関数やリーマン計量によらず、多様体の位相のみによることを、位相不変性という。以上がモース理論による位相的場の理論の構成である。

一次元の諸関係による、もう一つの位相的場の理論の構成は、一次元のグラフからの写像を考えることによるものである。一次元の単体複体をグラフといい、単連結であるとき、つまりその基本群が単位元のみからなる群であるとき、樹木という。樹木とは、単連結かつ連結な、コンパクト 1 次元単体複体のことである。グラフ上の距離を定め、辺の長さが無限のものは外線とする。k 本の外線の距離付き樹木の集合を T_{0,k} とする。T_{0,k} の要素 Γ を 2 次元の円盤 D^2 = {x ∈ ℝ^2 | |x| ≤ 1} に、δ D^2 ∩ Γ = V_e とするよう埋め込む。補集合 D^2 - Γ の k 個の連結成分がある。

樹木による位相的場の理論を構成するために、多様体 M 上に k 個の滑らかな関数 f_1, …, f_k を取る。モジュライ空間を定義する。M(M; f_1, …, f_k; p_1, …, p_k) はすべての写像 I : Γ → M (Γ ∈ T_{0,k}) の集合である。先ず、e が、i 番目と j 番目の領域の境界に含まれる、長さ 1 の向きのある内線であり、閉区間 [0, 1] と同一視される時、I の e への制限を、

$$\textcircled{1} dI |_{\mathcal{I}} / dt(t) = -\text{grad}_{I(t)}(f_i - f_j)$$

とする。次に、 e が外線であり、 $[0, \infty)$ と同一視され、 i 番目の領域と $i+1$ 番目の領域の境界である時 ($k \neq 2$)、 I の e への制限を、

$$\textcircled{2} dI|_e/dt(t) = -\text{grad}_{I(t)}(f_{i+1} - f_i)$$

とする。そして、 $f_{i+1} - f_i$ をモース関数とし、臨界点 p_i を選ぶと、

$$\textcircled{3} \lim_{t \rightarrow +\infty} I|_e(t) = p_i$$

である。これらを満たす $I: \Gamma \rightarrow M$ の集合を、 $M(M; f_1, \dots, f_k; p_1, \dots, p_k)$ とする。写像 $\pi: M(M; f_1, \dots, f_k; p_1, \dots, p_k) \rightarrow \mathcal{T}_{0,k}$ がある。このモジュライ空間の次元は

$$\dim M(M; f_1, \dots, f_k; p_1, \dots, p_k) = n - \sum (n - \mu(p_i)) + k - 3$$

である。写像

$$\eta_{k-1}: C \cdot (M; f_2 - f_1) \otimes \dots \otimes C \cdot (M; f_k - f_{k-1}) \rightarrow C \cdot (M; f_k - f_1)$$

を、

$$\eta_{k-1}([p_1] \otimes \dots \otimes [p_{k-1}]) = \sum \# M(M; f_1, \dots, f_k; p_1, \dots, p_k) [p_k]$$

と定義する。先の $\delta \delta = 0$ にあたるのは、

$$(\delta \eta_k)(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \pm \eta_{k-j+1}(x_1 \otimes \dots \otimes \eta_{j-i+1}(x_i \otimes \dots \otimes x_j) \otimes \dots \otimes x_k)$$

である。 $k=2$ の時、 η_2 はコチェイン写像である。よって写像

$$\eta_2^*: H^i(M; Z) \otimes H^j(M; Z) \rightarrow H^{i+j}(M; Z)$$

が導かれる。 η_2^* はカップ積である。 $k=3$ の時、 η_2^* は結合的であり、

$$\delta(\eta_2(u \otimes y) \pm \eta_2(x \otimes w) \pm \eta_3(u \otimes v \otimes w)) = 0$$

である。この左辺の元のコホモロジーを $\langle u, v, w \rangle$ とし、これはマッセイ積と一致する。このように、多様体の有理ホモトピー型はマッセイ積で決定され、樹木による位相的場の理論で記述できる。

必ずしも樹木でないグラフ、即ちリボングラフを用いた構成も可能である。リボングラフ Γ は、頂点を含む辺の集合の円順序を持つ一次元の単体複体であり、リーマン面 Σ に埋め込まれる。 k 印の (k -marked) リボングラフとは、リボングラフ Γ と頂点 v_0 と頂点 v_0 を含む k 本の辺を持ち、 v_0 を含む辺の集合が円順序となるものである。距離関数 1 を、内線の集合から正の数の集合への関数とする。各々の頂点を含む辺の数は 3 より小さくないとする。 g は Σ の種数であり、 k 印のリボングラフ Γ の円環とは、 $\Sigma - i(\Gamma)$ の連結成分の境界である部分複体である。 $[i]$ は円順序を持つ、リーマン面への Γ の埋め込みの、等方性のクラスである。

先と同様に、向き付けられた多様体 M と M 上の滑らかな関数の順序付けられた集合 (f_1, \dots, f_n) を取り、各々の $i \neq j$ に対して $f_i - f_j$ をモース関数とし、 x_i が $f_i - f_{i-1}$ の臨界点であるような M の点 x_1, \dots, x_k を取る。写像 $I: \Gamma - \{v_0\} \rightarrow M$ の集合と辺 e を取り、 e は $[0, 1(e)]$ と同一視され、 $\Sigma - i(\Gamma)$ の i 番目と j 番目の領域の間にあつて向きを持つとする。

$$dI|_e/dt(t) = -\text{grad}_{I(t)}(f_i - f_j)$$

この解の全体が、モジュライ空間 $M(M; f_1, \dots, f_k; g, k)$ である。これは先のウィッテン複体、カップ積、マッセイ積の構成を、樹木でないグラフを用いて一般化したものである。

三、 A^∞ 圏、フレアーホモロジー

前節の位相的場の理論の記述に、 A^∞ 圏が用いられる(12)。 A^∞ 圏は、対象の集合 Ob 、モルフィズムの集合 $C(a, b)$ ($a, b \in Ob$)、写像 η_k から成り、 $C_*(a, b)$ はチェイン複体であり、 $a_0, \dots, a_k \in Ob$ に対して、

$$\eta_k : C_*(a_0, a_1) \otimes \dots \otimes C_*(a_{k-1}, a_k) \rightarrow C_*(a_0, a_k)$$

は線形写像であり、

$$(\delta \eta_k)(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \pm \eta_{k-j+i}(x_1 \otimes \dots \otimes \eta_{j-i+1}(x_i \otimes \dots \otimes x_j) \otimes \dots \otimes x_k)$$

を満たす。これを前節にあてはめると、多様体 M 上の滑らかな関数を対象とし、ウィッテン複体の要素をモルフィズムとし、カップ積とマッセイ積を合成とする A^∞ 圏が構成される。 A^∞ 圏は A^∞ 関手を持つ。

ここでシンプレクティック多様体を用いて、無限次元のモース理論を構成する。シンプレクティック多様体 (X, ω) とは、 $d\omega=0$ 、 $\omega^n \neq 0$ であるような微分 2 形式 ω の $2n$ 次元多様体である。 (X^{2n}, ω) の n 次元部分多様体 Λ^n は、 $\omega|_{\Lambda^n} = 0$ 、即ち ω の Λ^n への制限が消える時、ラグランジアン部分多様体と呼ばれる。余接バンドルを T^*M とし、 $\pi : T^*M \rightarrow M$ を射影とする。シンプレクティック形式 $\omega \oplus -\omega$ の多様体を $Y = X \times X$ とする。 Y の二つのラグランジアン部分多様体 Λ_1, Λ_2 を取り、 $\pi_1(\Lambda_1) = \pi_1(\Lambda_2) = \pi_2(Y) = 1$ とする。無限次元の多様体は、

$$\Omega(\Lambda_1, \Lambda_2; Y) = \{l : [0, 1] \rightarrow Y \mid l(0) \in \Lambda_1, l(1) \in \Lambda_2\}$$

と表現される。 $\Omega(\Lambda_1, \Lambda_2; Y)$ の二つの要素 l_0, l_1 に対して、 $\sigma(l_0, l_1)$ を定義する。 $\Omega(\Lambda_1, \Lambda_2; Y)$ において l_0 と l_1 を結合する道 l_t ($t \in [0, 1]$) を取り、

$$\sigma(l_0, l_1) = \int_{[0,1] \times [0,1]} l_t^* \omega$$

とする。 $\sigma(l_0, l_1)$ は l_0 と l_1 を結合するホモトピー l_t ($t \in [0, 1]$) の選択に依存しない。線形写像 $J : TY \rightarrow TY$ を考え、

$$J^2 = -1$$

$$\omega(X, JX) \geq 0 \text{ (等号は } X=0 \text{)}$$

$$\omega(JX, JX) = \omega(X, X)$$

ならば、 J は ω と整合的な概複素構造という (ω はシンプレクティック構造)。 $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ はリーマン計量を与える。

$p, q \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ (Λ_1, Λ_2 はラグランジアン) に対して、以下の三つを満たすすべての写像 $\phi : D \rightarrow X$ の集合を考える：

$$J\phi_*(X) = \phi_*(JX)$$

$$\delta_1 D = \{z \in \delta D \mid \text{Im } z > 0\}, \quad \delta_2 D = \{z \in \delta D \mid \text{Im } z < 0\}$$

ならば、 ϕ は $\phi(\delta_1 D) \subseteq \Lambda_1$ 、 $\phi(\delta_2 D) \subseteq \Lambda_2$ であるような $D \cup \delta D$ 上の滑らかな写像である。

$$\phi(-1) = p, \quad \phi(+1) = q$$

この写像の集合は滑らかな多様体であり、その次元は

$$\dim M(X; \Lambda_1, \Lambda_2; p, q) \equiv \mu(p) - \mu(q) \pmod{2N}$$

$$(\mu : \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \rightarrow \mathbb{Z}/2N)$$

であり、この $\mu : \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \rightarrow \mathbb{Z}/2N$ は、モース指数 $\infty/2$ 、即ち無限次元である。

前節の構成と同様に、

$$C_k(X; \Lambda_1, \Lambda_2) = \bigoplus_{p \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2} \mathbb{Z}_2 \cdot [p]$$

$$\delta : C_k(X; \Lambda_1, \Lambda_2) \rightarrow C_{k-1}(X; \Lambda_1, \Lambda_2)$$

$$\delta [p] = \sum \# \underline{M}(X; \Lambda_1, \Lambda_2; p, q) [q]$$

$$\delta \delta = 0$$

このホモロジーは、概複素構造の選択によらず、シンプレクティック構造で決まり、ラグランジアン連続変形で不変である。これをラグランジアン交叉のフレアーホモロジー（無限次元のホモロジー）という。フレアーホモロジーの構成も、シンプレクティック多様体から、単連結なラグランジアンを対象、ラグランジアン交叉のフレアーホモロジーをモルフィズムとする A^∞ 圏で記述できる。

四、量子化

カップ積の量子化として、量子環や A 模型がある (13)。正の整数 m に対して、モジュライ空間 $T_{0,k}$ を

$$T_{0,\delta,m} = \{(D^2; x_1, \dots, x_k) \mid x_i \in \delta D^2, x_1, \dots, x_k \text{ は互いに分離しており、円順序にある}\} / \sim$$

とする。 \sim は正則同値を表す。 $x_i = x_{i+1}$ であるような外形を加えることによって、モジュライ空間 $T_{0,\delta,m}$ をコンパクト化でき、 $CT_{0,\delta,m}$ と表す。 $T_{0,\delta,m}$ の要素は一つの円環に含まれる m 個の点を持つリーマン面と見なされる。

$$T'_{0,k} = \{(\Gamma; D_1, \dots, D_a) \mid \Gamma \in \underline{T}_{0,k} \text{ (} a \text{ 個の内点を持つ)}, D_b \in CT_{0,\delta,m} \text{ (} \Gamma \text{ の } b \text{ 番目の点は } m \text{ 本の辺を持つ)}\}$$

$T'_{0,k}$ は $k-3$ 次元の開円盤と微分同相である。

モジュライ空間 $M^m(M, 0, k; f_1, \dots, f_k; x_1, \dots, x_k)$ を定義する。 M をシンプレクティック多様体とする。 M 上の整合的な概複素構造を選択する。 f_i をその上の関数とし、 x_i を $f_i - f_{i-1}$ の臨界点とし、 $P \in T'_{0,k}$ とする。 P のグラフ上で第二節の①②③を満たし、 I が各々の面で概正則であり、 $\int_P I^* \omega = m$ であるような連続写像 $I : P$

→M を考える (ω はシンプレクティック形式を表す)。この様なすべての空間が、モジュライ空間 $M^m(M, 0, k; f_1, \dots, f_k; x_1, \dots, x_k)$ である。再び写像 $\pi : M^m(M, 0, k; f_1, \dots, f_k; x_1, \dots, x_k) \rightarrow T'_{0,k}$ がある。 $M^m(M, 0, k; f_1, \dots, f_k; x_1, \dots, x_k)$ は次元 $n - \sum \mu(x_i) + k - 3$ の多様体である。第二節の η_{k-1} と同様に、

$$\eta_{k-1}^m : C^{al}(M; f_2 - f_1) \otimes \dots \otimes C^{ak-1}(M; f_k - f_{k-1}) \rightarrow C^{\sum ai+k-3}(M; f_k - f_1)$$

$$\eta_{k-1}^m([x_1] \otimes \dots \otimes [x_{k-1}]) = \sum_{x_k} \# M^m(M; f_1, \dots, f_k; x_1, \dots, x_k) [x_k]$$

と定義できる。 $\underline{\eta}_{k-1} = \sum T^m \eta_{k-1}^m$ より、

$$\underline{\eta}_{k-1} : \underline{C}^{al}(M; f_2 - f_1) \otimes \dots \otimes \underline{C}^{ak-1}(M; f_k - f_{k-1}) \rightarrow \underline{C}^{\sum ai+k-3}(M; f_k - f_1)$$

$$(\delta \underline{\eta}_k)([x_1], \dots, [x_k]) = \sum_{i < j} \varepsilon \cdot \underline{\eta}_{k-j+i}([x_1], \dots, \underline{\eta}_{j-i}([x_{i+1}], \dots, [x_j])). \dots, [x_k])$$

が得られる。 $\underline{\eta}_2$ は量子環である。量子マッセイ積は、

$$\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \underline{\eta}_2(y_1, x_3) + (-1)^{\deg x_1} \underline{\eta}_2(x_1, y_2) + \underline{\eta}_3(x_1, x_2, x_3)$$

となる。

結び

以上により、カルナップの一次元の諸関係に基づく、関手によって記述される位相的空間は、多様体に、位相的規定としてモース理論、計量的規定としてリーマン計量を与え、位相的場の理論としてのウィッテン複体を構成すること、また一次元のグラフによって位相的場の理論を構成することに対応し、それは A^∞ 関手を持つ A^∞ 圏によって記述でき、更にそれは無限次元のモース理論に拡張され、更に量子化し得ることが示される。本論文は、カルナップの空間概念の、無限次元のホモロジーの手法による、初めての能う限りの一般化を狙うものである。

註

(1) Henri Poincaré, “Sur l’Analysis Situs,” “Analysis Situs,” “Complément à l’Analysis Situs,” “Second Complément à l’Analysis Situs,” in *Œuvres de Henri Poincaré: Publiées sous les Auspices de l’Académie des Sciences par la Section de Géométrie* (Paris: Gauthier-Villars, Éditeur, 1953), Tome VI pp. 189-288, 290-370 参照。

(2) Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory* (New York: Springer-Verlag, 1992), pp. 1, 267 参照。

(3) Rudolf Carnap, *Der Raum: Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre* (Berlin: Verlag von Reuther & Reichard, 1922).

- (4) Carnap, *Physikalische Begriffsbildung* (Karlsruhe: Verlag G. Braun, 1926).
- (5) Carnap, *Einführung in die symbolische Logik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen* (Wien: Springer-Verlag, 1954).
- (6) Carnap, *Der Raum*, pp. 65-7; *Einführung in die symbolische Logik, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen*, p. 198 参照。
- (7) Carnap, “Über die Abhängigkeit der Eigenschaften des Raumes von denen der Zeit,” *Kant-Studien* (Berlin), Bd. 30, H. 3/4 (1925), pp. 331-45.
- (8) Carnap, *Abriss der Logistik, mit besonderer Berücksichtigung der Relationstheorie und ihrer Anwendungen* (Wien: Verlag von Julius Springer, 1929).
- (9) Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician* (2nd edn. New York: Springer-Verlag, 1998), p. 30 参照。
- (10) Carnap, *Logische Syntax der Sprache* (Wien: Verlag von Julius Springer, 1934).
- (11) この構成は、以下の文献を典拠になされたものである。Kenji Fukaya, “Morse Homotopy and Its Quantization,” in *Geometry and Topology*, W. Kazez (ed.), AMS/IP Studies in Advanced Math. 2-1 (Hong Kong: International Press, 1997), pp. 409-40; “Informal Note on Topology, Geometry and Topological Field Theory,” in *Geometry from the Pacific Rim*, A. J. Berrick, Bonaventure Loo, and Hong-Yu Wang (eds.), (Berlin: Walter de Gruyter, 1994), pp. 99-116; “Morse Homotopy, A^∞ -Category, and Floer Homologies,” in *Proceedings of Garc Workshop on Geometry and Topology*, Hong-Jong Kim (ed.), (Seoul: Seoul National University, 1993), pp. 1-102; 「位相的場の理論とモース理論」(『数学』46、東京：岩波書店、1994年)、289-307頁；『シンプレクティック幾何学』(東京：岩波書店、1999年)、193-218、243-76、294-372頁；『ゲージ理論とトポロジー』(東京：シュプリンガー・フェアラーク東京、1995年)、10-33、135-264、265-84頁；Raoul Bott and Loring W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology* (New York: Springer-Verlag, 1982), pp. 174, 192; 森田茂之『微分形式の幾何学』(東京：岩波書店、2005年)、155-64頁参照。
- (12) この構成は、以下の文献を典拠になされたものである。Kenji Fukaya, “Floer Homology for 3 Manifolds with Boundary I” (unpublished written in 1997); “Morse Homotopy, A^∞ -Category, and Floer Homologies”; “Morse Homotopy and Its Quantization”; 「位相的場の理論とモース理論」293-7

頁、『シンプレクティック幾何学』3-241、294-372頁、『ゲージ理論とトポロジー』271-84頁参照。

(13) この構成は、以下の文献を典拠になされたものである。Fukaya, “Morse Homotopy and Its Quantization”; “Morse Homotopy, A^∞ -Category, and Floer Homologies”; 『シンプレクティック幾何学』21-80、141-63、218-94、309-33頁参照。