京都・顕真学苑論文集
（副題：カルナップと幾何学とに基づく数理哲学）
Kyoto-Kenshingakuen Collected Papers
The Mathematical Philosophy Based on Carnap and Geometry

第二論文
カルナップの空間論における曲面の幾何学――三種の立証
（２００６年２月執筆）
the second paper
The Geometry of Surfaces in Carnap's Theory of Space
── Three Demonstrations

「カルナップの空間論における曲面の幾何学――三種の立証」の仏教的背景
The Buddhistic Background of “The Geometry of Surfaces in Carnap's Theory of Space ── Three Demonstrations”

京都・顕真学苑副幹（顕真）
the subeditor at Kyoto-Kenshingakuen (Kenshin)

Abstract

The Buddhistic background of this paper is the following phrase in Daśabhūmi-vyākhyāna: “The three worlds are unreal and delusory, and nothing but works of a single thought,” “because all three worlds are only transformation of mind.” Space is a set of dharmāh, hence consideration of space leads to observation of dharmāh. According to Buddhāvatamsaka-nāma-mahā-vaipulya-sūtra, dharmāh are like space

and the realm of space is replete with Buddha-kāya. In the True Pure Land Sect, concerning the vicissitude of mind, “the transmutation of rubble into gold” viz. “the conversion of evil into good” is virtue and power of faith and homage to Amitābha-buddha. This paper, “The Geometry of Surfaces in Carnap’s Theory of Space —— Three Demonstrations,” reveals for the first time three types of demonstrations that, through the transformation of measuring rules, that is, by means of “works of a single thought,” space “is transformed only by mind” from a curved surface to a plane. “The three worlds (sangai) are nothing but works of a single thought” corresponds to “three types (sankai) of demonstrations.”

本論文「カルナップの空間論における曲面の幾何学――三種の立証」（２００６年２月執筆）には、次の文が背景にございます：＜經曰。是菩薩作二是念一三界虚妄但是一心作」論曰。但是一心作者。一切三界唯心轉故。＞（經に曰わく。是の菩薩は是の念を作す。三界は虚妄にして但だ是れ一心の作なりて。論に曰わく。但だ是れ一心の作なりてとは、一切三界は唯だ心の轉のみなるが故なり。）（大正新脩大藏經　釋經論部下　毘曇部１　第２６巻　大正新脩大藏經刊行會　大藏出版　１９７６年　１６９頁上段。天親菩薩『十地經論』巻第八。）空間論と仏教との間にどんな関わりがあるのか、とお考えになるかもしれません。しかし、空間は諸法の集まりでございますから、空間を考察することは、法を観察することに通じる、と私は考えております。実際、諸法は虚空の如し、或いは、佛身は虚空界に充滿せり、と書かれておりますのは周知の事実でございます（大正新脩大藏經　法華部全　華嚴部上　第９巻　１９６０年　４２３頁中段　４２７頁上段）。虚空は、無礙、無限、遍満、何ものにも打ち破られないものの喩えにもなりまして、また禅道と関係の深い道教におきましても、物の真に肝要な所は虚空に存し、虚空はすべてを含有するが故に万能である、とされております。浄土真宗におきましても、心の転変に関しましては、『唯信鈔文意』や『教行信證』行文類に「能令瓦礫變成金」とございますように、「瓦礫を變じて金と成す」崑崙山の妙趣こそ、浄土真宗のお念佛の無碍力でございまして、「惡を轉じて德と成す正智」、つまり轉惡成善とは、浄土真宗の信心の威徳でございます。

カルナップは１９２２年に出版された『空間』（*Der Raum: Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre*）にて、通常の度量規定（Maßsetzung）M_1においては曲面である地球が、度量規定をM_Sに変更すると平面になる、と主張します。この『空間』の主張の整合性を、正面から論じ、立証した研究は、私の見る限り、これまでにはございませんでした。本論文「カルナップの空間論における曲面の幾何学――三種の立証」は、このカルナップの論旨の正当性を、三通りの方法で、

初めて立証するものでございます。度量規定を変更するという「一心の作」によって、空間が曲面から平面に、「唯だ心によりて轉ぜらるる」ことを、三回に亘って立証するものなのでございます。本論文におきましては、三界一心作が仏教的背景でございますので、三回に亘りまして立証いたしました。

第一の立証におきましては、ライヘンバッハの「普遍的力」により位置と方位によって関数的に変化する距離基準を応用いたします。（距離が位置と方位によって関数的に変化するのは一見奇妙に思われますが、グリュンバウムも、物理的空間は連続的であり、連続的空間における任意の二点間の点の集合の基数は同一であるから、二点間の距離はその間の点の数によっては定義できず、計量特性は連続的空間に対して本質的ではないと主張して、測定基準の規約性を暗示しております。）第二の立証におきましては、シュレーディンガーの文献中のド・ジッター宇宙のルメートル・ロバートソン座標による座標変換を用いますと、同時的空間は平坦かつ無限となります。度量規定の変更を座標規定の変更と解釈しましても、カルナップの規約主義は一般性を失わないからでございます。第三の立証におきましては、「空間が曲がっていること」を、ガウス曲率の意味にではなく、全測地的ではないという意味に解釈しますと、度量規定の変更を共形変換と見なすことによりまして、地球の表面は全測地的、すなわち平坦になります。この三つの立証を、初めて提示いたします。

『空間』は独語版のみが存在し、英訳はございません。カルナップの世界構築の背景には空間論が隠されている、と私は考えておりますので、世界構築の原点である空間論をより良く理解するために、本論文にてその論旨を三通りに立証した次第でございます。言語の枠組み次第で、空間は変わる、ということでございます。

京都・顕真学苑論文集
（副題：カルナップと幾何学とに基づく数理哲学）

Kyoto-Kenshingakuen Collected Papers

The Mathematical Philosophy Based on Carnap and Geometry

第二論文

カルナップの空間論における曲面の幾何学――三種の立証

（２００６年２月執筆）

the second paper

The Geometry of Surfaces in Carnap's Theory of Space

── Three Demonstrations

京都・顕真学苑副幹（顕真）
the subeditor at Kyoto-Kenshingakuen (Kenshin)

Abstract

Der Raum: Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre is the starting point of Carnap's construction of the world. The theory of space is concealed in the background of Carnap's construction, and it is a study of the nature of geometry. Carnap regards the nature of geometry as extremely important, and thinks about it a great deal. Carnap insists in *Der Raum: Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre* that, by means of the transformation of measuring rules, the Earth is regarded as a plane. In *Der Raum: Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre*, in accordance with the measuring rule Ms, the standard of distance is transformed by its position and height. These insistences are appropriate. This paper reveals for the first time three types of demonstrations that, through the transformation of measuring rules, space changes from a curved surface to a plane. First, Reichenbach says that physical geometry depends on the standard of measurement and that the standard of length is transformed functionally according to its position and orientation by dint of universelle Kräfte. Grünbaum contends that the distance between two points cannot be defined by the number of points between them, and suggests the conventionality of the standard of measurement. The transformation of measuring rules can be interpreted as the transformation of the first fundamental form of the surface into that of the plane. Second, on the Lemaître-Robertson frame in the de Sitter universe, "contemporary spaces" are regarded as flat and infinite by the transformation of frames. Third, if "transformation of measuring rules" is substituted

for “conformal transformation,” and if “curvature” is interpreted not as “Gaussian curvature” but as “not totally geodesic,” Carnap’s assertion has mathematical implications. When a three-dimensional Euclidean space excluding the origin is conformally transformed, it is said to be a product of a spherical surface and a straight line. In the product of a spherical surface and a straight line, the product of a spherical surface and a single point is totally geodesic, that is, flat. The concept of “conformally flat” in a three-dimensional Riemannian space or a space of constant curvature comes closest to Carnap’s point regarding a spherical surface as a plane by means of the transformation of measuring rules.

はじめに

　カルナップがその代表的著作『世界の論理的構築』(1)と『言語の論理的構文論』(2)等において彼の論理的体系を構築した時、彼が学位論文以来温め続けてきた幾何学の性質についての考察、即ち空間論が、その構築の背景に隠されていたという事実を知る人は少ない。現に、１９２２年に出版されたカルナップの学位論文『空間』(3)を正面から研究している論文は、私の見る限り今までにはなく、『空間』についての記述が辛うじて存在する文献(4)においても、『空間』の論旨の整合性が立証されたことはこれまでになかった。しかし、カルナップ自身が１９６６年の『物理学の哲学的基礎』において、学位論文で取り上げた幾何学の性質の考察即ち空間の考察を極めて重要と見なし(5)、その考察を以来ずっと続けて来たと述べていることからも推察できるように、彼の世界構築とは、本質的に時空体系の構築に近しいものであり、彼の構築の原点は空間論にあると考えられる。カルナップの空間論を研究することによって、彼の世界を明確に見ることが可能となるのである。『空間』はドイツ語版のみが存在し、英訳はない。

　本論文においては、度量規定（Maßsetzung）の変更により空間が曲面から平面に転じるという、カルナップの空間論の論旨の整合性を、初めて三通りに立証する。規約性は、学位論文『空間』のみならず、『世界の論理的構築』、『言語の論理的構文論』等に通底し、カルナップの世界構築の自由性を確守する概念である。『空間』においてカルナップは、０以上の定曲率のリーマン空間を選択する。カルナップの主張するところでは、通常の度量規定 M_1 においては、地球は球体として捉えられるが、度量規定を M_S に変更することにより、それは平面であると解釈することができる。このような構成が可能である理由は、変更された度量規定 M_S が、距離の基準は測定の位置・高度によって変化する、とするものだからである。

カルナップのこの主張はリーマン幾何学に対する誤解に基づくものであるから、これに意味を見出すのは全くのナンセンスであるとする見解もあるが、そのような見解自体が、誤解に基づくものと考えられる。例えば、ライヘンバッハは、１９２８年の文献(6)において、物理的空間の幾何学がユークリッド的か非ユークリッド的かは測定基準に依存すること、距離は位置と方位によって関数的に変化すること等を主張している。またグリュンバウムも、１９６８年の文献(7)において、物理的空間は連続的であり、連続的空間における任意の二点間の点の集合の基数は同一であるから、二点間の距離はその間の点の数によっては定義できず、計量特性は連続的空間に対して本質的ではないと主張して、測定基準の規約性を暗示している。

実際、カルナップのように、同時的空間を平坦と見なす構成は、現実に可能である。その実例は、シュレーディンガーの１９５６年の文献(8)にある、ド・ジッター宇宙（the de Sitter universe）におけるルメートル・ロバートソン座標（the Lemaître-Robertson frame）による構成であり、それは測定基準ではなく座標体系を変える方法を取るものである。カルナップの空間論は、これらの文献に先駆けて、真実を穿ったものであると考えられる。

本論文の趣旨は、度量規定の変更により空間が曲面から平面に転じるという、カルナップの空間論における主張の整合性を、初めて三回に亘って立証することである。先ず第１節において、カルナップの空間論の要点を記述する。次いで第２節において、ライヘンバッハの主張を展開して、距離基準と幾何学との関係について考察し、度量規定の変更により球面を平面と見なし得るというカルナップの主張に、それを応用する。第３節において、ド・ジッター宇宙におけるルメートル・ロバートソン座標による構成について述べ、座標変換と幾何学との関係を考察する。第４節では、度量規定の変更を共形変換と見なすことによって、地球の表面は全測地的、即ち平坦になる、という解釈について説明する。以上により、カルナップの空間論の整合性が、三通りに立証される。

１．カルナップの空間論

１９２２年の『空間』において、空間概念は、形式的空間、直観的空間、物理的空間に大別され、更にそれは位相的空間、射影的空間、計量的空間に分かれ、亜種として等方的空間、非等方的空間、同次的空間に分類され、等方的同次的空間の亜種として双曲的空間（ロバチェフスキー）、放物的空間（ユークリッド）、楕円的空間（リーマン）に区分される(9)。曲率についての議論において取り上げられるのは、物理的等方的同次的リーマン空間である。

物理的空間において、物理的線が直線であるか否かを調べる可能性を与える

規定は、直線規定（Geradensetzung）と度量規定である。カルナップは、地球の表面 E を平面と見なす仮説を立てる(10)。E は、通常の度量規定 M_1 に基づいて測量すると、球である（偏平率は考慮しない）ことが判明するので、他の度量規定が必要とされる。この場合カルナップが選択する空間は、同次的で等方的であり、すべての点と面方向（Flächenrichtung）において同じ正の曲率が定められているとする。即ち、$R''_{ih>}$（曲率が０以上の物理的同次的等方的リーマン空間）が選択される。この選択された空間に、度量規定 M_S を帰属させる。M_S とは、〈鉄の固体上の二つの点 A と B は或る間隔を表し、その間隔は、E 上の高度 h_s に依存する（$l=l_0(1\text{-}\sin h_s)$)〉とするものである。

度量規定 M_1 によれば、地球の大円が E 上の最短の線であり、従って度量規定 M_S による場合もそうである。cm 度量尺度は M_S 測定に対しても通用する。簡単のために、６３７０km を長さの単位として選ぶ。この単位において、直線の全長、例えば赤道或いは子午線の全長は、等しく２πとなる。E 上の任意の二点を通るのはただ一つの線であるが、それが対極の点（対蹠点）である場合は、対蹠点を通る無数の線がある。これより、E は度量規定 M_1 において、楕円状の面の変種（球状面）として特徴付けられる。この球状空間のすべての直線は、長さ２πを持つ。二点間の最大距離は、πであり、h_s の最高値はπ/２である。

以上に基づいて、カルナップは、度量規定 M_S による測定において E が平面となることを、以下のように示す。度量規定 M_S は、〈E 上で測定された場合に長さ a を持つ物理的線分は、高度 x において垂直に立てられた場合に長さ x_s を持ち、この長さ x_s は a と、以下の方程式 $\int^{xs}_0 dx/(1\text{-}\sin x)=a$ によって関係付けられる〉と定められる。天頂にある星の距離は、度量規定 M_1 によると大変大きいかもしれないが、度量規定 M_S によると、π/２より小さい。度量規定 M_S による距離が、最大値π/２に近づくにつれて、見かけ上の距離は際限なく増える。度量規定 M_1 において、E は平面ではなく、その窪んだ側が地球の内側に向いている曲がった面である。即ち、E 上の任意の二点が、一方では E 上の最短の結合線によって結ばれ、もう一方では直線の地下道によって結ばれている。その地下道は常に、E 上の結合線より短い。度量規定 M_S が用いられる場合は、地下道のみならず、二点の任意の他の結合線もまた、地球の内または外を走り、E 上の二点の最短の結合より常に長い。E 上の最短の結合線は、直線の線分とされ、同様のことが E 上の任意の場所において成り立ち、E は度量規定 M_S において平面であるとされる。

この主張に対して、光線の振舞が地球の球形を明確に認識させるという異議もあるが、それは光線の直行性の前提に基づいているため、論駁可能である。物理的線の直行性は、一定の度量規定に対してのみ通用する。度量規定 M_S にお

いて、光線は曲がった線、「天頂」を通る円として理解される。また、度量規定 M_S により E 上に垂直に立つ直線は、地球の中心において距離 $\pi/2$ で交差するのみならず、地球の中心の対極である、地球の外にある「天頂点」Z において、E から同じ距離で交差する。度量規定 M_S に関して、E は両面に、地球の内部においても外部においても同様の状態にあるので、平面と見なされる。度量規定 M_1 では 10m の長さの線分は、E から距離 x_s にあるならば、度量規定 M_S においては $10(1-\sin x_s)$m と測定されるため、力学の基本概念、例えば運動エネルギーも $L_s=m_s v_s^2/2(1-\sin x_s)^2$ となる。

経験事象 T、度量規定 M、計量的空間構造 R の間には相互依存関係があり、また、関数関係、即ち、それらのうち二つが与えられると、三つ目の規定がそれによって明確に与えられるという関係がある。R 或いは M は自由に選択することが許されるが、T は R と M とに基づいて、可能な限り単純に表現される。

以上が『空間』における、測定基準と曲率との関係についての主張である。カルナップは後に、１９６６年の『物理学の哲学的基礎』(11)において、この測定と面の曲率との関係について再考している。カルナップの挙げる例は、以下の通りである。二次元の生物である P_1 と P_2 とが、それぞれ理論を提出する。P_1 は、彼らの住む領域は球状面 S_1 の一部であると主張する。P_2 は、その領域は平面 S_2 であると主張する。S_1 に、大きさや形を変えずに動く硬い二次元の物体があると仮定する。S_1 のそのすべての物体に対して、平面 S_2 に垂直な平行線による S_1 からの射影である、S_2 において対応する平らな物体がある。S_1 の物体が A_1 の位置から A_1'の位置に動くならば、S_2 におけるその射影の物体は A_2 から A_2'に動く。S_1 の物体は硬いと仮定するので、A_1 の長さは A_1'の長さに等しい。しかしこれは、A_2'が A_2 より短く（或いは長く）なければならないことを意味するのである。

P_1 は、彼らの世界は球の一部であると主張し、P_2 は、その世界は平面であるが、その物体は動くにつれて、予測可能的に拡張収縮すると主張する。例えば、物体は S_2 の中心部に向かって動くにつれて長くなり、中心から離れるにつれて短くなる。P_1 と P_2 は彼らの二次元の世界に制限されているので、どちらの理論が正しいか、原則として決定できない。世界を記述する多くの異なる方法からいずれを選択するかは、規約の問題である。

２．測定基準と幾何学――第一の立証

以上のように、カルナップの空間論においては、度量規定の変更により、球面は平面と解釈され、その場合、距離の基準は測定の位置と高度によって変化する。それと同様に、ライヘンバッハは１９２８年の文献で、物質において収

縮と拡張を引き起こす「普遍的力（universelle Kräfte）」を仮定し、長さはその位置と方位によって関数的に変化すると見なす。異なる測定方法は、異なる幾何学に帰着するのである。グリュンバウムは、計量特性は連続的空間に対して本質的なものではなく、規約的であると主張しながらも、このライヘンバッハとカルナップの主張には反論を試みている（12)。しかし、私見によれば、両者の主張の正当性は、以下のように立証される。先ず、このライヘンバッハの主張は、フリードマンに従って、次のように展開することができる(13)。フリードマンによれば、半径 r の半球は、関数

$X(u^1, u^2)=(r \cos u^2 \cos u^1, r \cos u^2 \sin u^1, r \sin u^2)$

$(0 \leqq u^1 < 2\pi, 0 \leqq u^2 < \pi/2)$

で表現される。そしてその半球に対応する平面は、関数

$Y(v^1, v^2)=(v^1, v^2, 0)$

$(0 \leqq (v^1)^2+(v^2)^2 \leqq r^2)$

で表現される。半球の第一基本形式は（フリードマンの省略された式に、途中の計算を書き加えると）、

$ds^2=((-r \cos u^2 \sin u^1)^2+(r \cos u^2 \cos u^1)^2+0))(du^1)^2+2((-r \cos u^2 \sin u^1)(-r \sin u^2 \cos u^1)+(r \cos u^2 \cos u^1)(-r \sin u^2 \sin u^1)+0)du^1du^2+((-r \sin u^2 \cos u^1)^2+(-r \sin u^2 \sin u^1)^2+(r \cos u^2)^2)(du^2)^2=r^2 \cos^2 u^2(du^1)^2+r^2(du^2)^2$

であり、平面の第一基本形式は、

$ds^2=(dv^1)^2+(dv^2)^2$

である。半球から平面への射影は、半球から平面への写像によって表現される。この写像は、半球上の点(u^1, u^2)を平面上の点$(r \cos u^2 \cos u^1, r \cos u^2 \sin u^1)$の上に写す。即ち、

$v^1=r \cos u^2 \cos u^1$

$v^2=r \cos u^2 \sin u^1$

平面上の座標が半球上の座標と等しくなるように、

$v^1=r \cos v^{2*} \cos v^{1*}$

$v^2=r \cos v^{2*} \sin v^{1*}$

として、平面上に新しい座標(v^{1*}, v^{2*})を導入すると、平面は、

$Y^*(v^{1*}, v^{2*})=(r \cos v^{2*} \cos v^{1*}, r \cos v^{2*} \sin v^{1*}, 0)$（フリードマンの論文では、ここに誤植がある）

$(0 \leqq v^{1*} < 2\pi, 0 \leqq v^{2*} < \pi/2)$

と表現され、その第一基本形式は（フリードマンの省略された式に、途中の計算を書き加えると）、

$ds^2=((-r \cos v^{2*} \sin v^{1*})^2+(r \cos v^{2*} \cos v^{1*})^2+0)(dv^{1*})^2+2((-r \cos v^{2*} \sin v^{1*})(-r \sin v^{2*} \cos v^{1*})+(r \cos v^{2*} \cos v^{1*})(-r \sin v^{2*} \sin v^{1*})+0)dv^{1*}dv^{2*}+((-r \sin v^{2*}$

$\cos v^{1*})^2+(-r \sin v^{2*} \sin v^{1*})^2+0)(dv^{2*})^2=r^2 \cos^2 v^{2*}(dv^{1*})^2+r^2 \sin^2 v^{2*}(dv^{2*})^2$

である。平面の居住者が、楕円的幾何学を彼らの世界に帰する場合には、彼らは、第一基本形式の表現を、半球の第一基本形式と同じ形式、即ち

$ds^2=r^2 \cos^2 v^{2*}(dv^{1*})^2+r^2(dv^{2*})^2$

に変更しなければならない。間隔 $I=[a, b]$の長さは$\int_{aI}^{b}ds$ に等しい。

以上がライヘンバッハのフリードマンによる再構成であるが、これはカルナップの１９６６年の『物理学の哲学的基礎』の主張と、ほぼ同一のものである。双方とも、物理的空間の幾何学は計測手続きに依存することを説明するものである。

以上の再構成は、カルナップの１９２２年の『空間』の主張（度量規定の変更により、球面は平面と見なすことができ、距離の基準は測定の位置によって変化する）に応用可能である。地球の表面上の点 x における接平面 P 上の点 p_n に、x の対蹠点 y から直線を引く。その直線と地球の表面との交点を q_n と置く。球面上の xq_n の長さとして、接平面上の xp_n の長さを対応させるという測定基準を選択すると、地球の表面上の距離基準は接平面上の距離基準と等しいものと見なされ、異なる幾何学が帰結する。（但し、この測定基準では、球面上の xy の長さは無限であるとされる。）故に、測定基準の変更により、地球の表面を平面と見なすことができる。連続的空間において、計量特性は規約的なものであるため、空間が曲がっているか否かは度量規定の選択に依存するという１９２２年の『空間』におけるカルナップの主張の整合性が、ここにおいて示される。

３．座標変換と幾何学――第二の立証

前節では、測定基準の変化によって幾何学も変化するということを示した。本節においては、座標変換によっても幾何学は変化し得るという事実を論じ、それによってカルナップの空間論の整合性を、もう一つの視点から明らかにする。ここで座標規定の変更を取り上げるのは、度量規定の変更を座標規定の変更と解釈しても、カルナップの空間論の規約性は一般性を失わないと考えられるからである。一般には、座標変換によっては幾何学は変化しないとされている(14)が、ここにその反例を挙げて、それが変化し得ることを示す。カルナップの『空間』においては、空間が曲がっているか否かは度量規定に基づく。それと同様に、シュレーディンガーの１９５６年の文献におけるド・ジッター宇宙のルメートル・ロバートソン座標においては、空間が有限で曲がっているか否かは座標規定に基づく。即ち、双曲面 $x^2+y^2-z^2=R^2$ 上を通る平行な４５度の平面の集合による放物線の集合を、同時的空間と見なす。そして、x 軸に平行な４５度の平面の集まり、換言すると〈y+z=定数〉の族を選ぶ。これは、時間変数

$t=f(y+z)$を導入することを意味する。但し $y+z=0$ である場合は除く。この双曲面上の $t=$定数の方向は、

$dy+dz=0$

$xdx+ydy-zdz=0$

で与えられるため、

$dx: dy: dz=-(y+z): x: (-x)$

である。これに対してミンコフスキー直交である任意の方向 δx、δy、δz は、

$-(y+z)\,\delta x+x\,\delta y+x\,\delta z=0$

$\delta(y+z)/(y+z)=\delta x/x$

$x/(y+z)=\alpha$ （定数）

そして空間座標は

定数 $r=g(x/(y+z))$

とする。

　ここで、

$r=Rx/(y+z)$

$t=\log((y+z)/R)$

と置くと（シュレーディンガーの省略された式に、途中の計算を書き加えると）、

$y+z=Re^t$

$x=re^t$

$y-z=(R^2-x^2)/(y+z)=(R^2-r^2e^{2t})/Re^t=Re^{-t}-r^2e^t/R$

と計算できるため、線素は（シュレーディンガーの省略された式に、途中の計算を書き加えると）、

$ds^2=-dx^2-dy^2+dz^2=-2e^{2t}dr^2-e^tRdt(-e^{-t}Rdt-e^tdr^2/Rdt)=-e^{2t}dr^2+R^2dt^2$

である。

　同様に、超双曲面 $x^2+u^2+v^2+y^2-z^2=R^2$ に対する、ルメートルの変換は、

$x'=Rx/(y+z)$, $u'=Ru/(y+z)$, $v'=Rv/(y+z)$, $t=\log((y+z)/R)$

となり、空間の半径ベクトル r は

$r^2=x'^2+u'^2+v'^2$, $r\geqq 0$

である。上記の計算の通り（シュレーディンガーの省略された式に、途中の計算を書き加えると）、

$y+z=Re^t$

$x=x'e^t$, $u=u'e^t$, $v=v'e^t$

$y-z=(R^2-x^2-u^2-v^2)/(y+z)=(R^2-r^2e^{2t})/Re^t=Re^{-t}-r^2e^t/R$

$ds^2=-dx^2-du^2-dv^2-dy^2+dz^2=-2e^{2t}dr^2-e^tRdt(-e^{-t}Rdt-e^tdr^2/Rdt)=-e^{2t}(dx'^2+du'^2+dv'^2)$
$+R^2dt^2$

　故に、ds^2 の計量により、任意の固定された時間において、同時的空間(x', u', v')

は平坦で無限であることがわかる。座標体系を変えただけで、空間の幾何学もまた変化する。度量規定の変更により空間が平坦になるという、カルナップの主張の整合性が、ここにおいても立証される。

４．共形変換――第三の立証

更に、「空間が曲がっていること」を、ガウス曲率の意味にではなく、全測地的ではないという意味に解釈すると、度量規定の変更を共形変換とみなすことにより、地球の表面は全測地的、即ち平坦になり得る、という解釈もある。それは、私のカルナップ読解文を前提とした、深谷賢治氏の示唆によるものである。一般に、３次元リーマン空間や定曲率空間（$n \geqq 3$）が共形的に平坦であるという定理の存在は周知であるが、この示唆によると、「３次元ユークリッド空間から、原点を除いたものを、共形変換すると、球面と直線の直積になる」という事実があり、球面と直線の直積の中では、球面は全測地的、即ち平面になる、とのことである。換言すると、ユークリッド計量を共形変換したリーマン計量を考え、球面と実数との直積から、３次元ユークリッド空間から原点を除いたものへの写像を作ると、この写像は等長変換になる、そして球面と実数の直積の中では、球面×１点は全測地的である、という指摘である。

この指摘をカルナップの論旨に適用すると以下のようになる。多様体M上の二つのリーマン計量 g_1 と g_2 が互いに共形的であると呼ばれるのは、$g_2=fg_1$ であるような正の関数 $f \in C^{\infty}(M)$が存在する場合である(15)。この共形変換を、度量規定の変更と対応させる。即ち、共形変換後、球面と直線の直積の中で、球面が全測地的、つまり平坦になるという事実を、カルナップの、度量規定のM_1からM_Sへの変更により、球面が平面とみなされるという主張に対応させる。このように、３次元リーマン空間や定曲率空間の「共形的に平坦」という概念は、カルナップの度量規定の変更による球面の平面化という概念に、最も近しいものと考えられる。

この解釈によれば、度量規定の変更により球面が平面とみなされるというカルナップの構成に、数学的な誤りはない。確かにカルナップは、曲率について、三角形の内角の和が１８０度に等しいかそれより小さいか大きいかを問題にしており(16)、「ガウス・リーマン曲率」という言葉を用いているので(17)、カルナップの言う「曲がっていること」とは、ガウス曲率の意味であるように思われる。しかし、「曲がっていること」の解釈を「ガウス曲率」という意味から「全測地的ではない」という意味に置き換え、更に、「度量規定の変更」という概念を「共形変換」という概念に置き換えることにより、カルナップの構成が新たな意味を持つという事実は、新しい意味付けによる古い構成の蘇生を暗示する

ものである。

結び

　以上において、度量規定の変更により空間が曲面から平面に転じるという、カルナップの空間論の主張の整合性を、三通りに立証することができた。計量特性のみならず、トポロジー的特性もまた、規約的であると言える。同じ幾何学であっても、同値関係（同一視）を変更することによって、トポロジー的に異なる空間が生じるためである。古代の金言を用いるならば、言語の枠組みを変えるという一心の作により、空間はただ心によりて転ぜらるる、ということである。

　カルナップは、更に、１９２５年の論文「空間特性の時間特性への依存について」(18)と１９５４年の『記号論理学入門、その応用への個別の考慮と共に』(19)等においても、空間について論じている。それらの論著における空間と時間の関係についての論、即ち時空論を取り上げ、カルナップの空間論と時空論が、彼の体系構築に如何なる基礎付けを与えているかについて論じることが、今後の課題である。

註

(1) Rudolf Carnap, *Der Logische Aufbau der Welt* (Berlin-Schlachtensee: Weltkreis-Verlag, 1928).

(2) Carnap, *Logische Syntax der Sprache* (Wien: Verlag von Julius Springer, 1934).

(3) Carnap, *Der Raum: Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre* (Berlin: Verlag von Reuther & Reichard, 1922).

(4) Alan W. Richardson, *Carnap's Construction of the World: The Aufbau and the Emergence of Logical Empiricism* (Cambridge: Cambridge University Press, 1998), pp. 139-58 等参照。

(5) Carnap, *Philosophical Foundations of Physics* (New York: Basic Books, Inc., 1966), p. 125 参照。彼は、『空間』においては幾何学の性質を論じたとし、幾何学は時空体系の分析に通じるものであるとしている。

(6) Hans Reichenbach, *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre* (Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1928), pp. 18-22; *The Philosophy of Space & Time* (New York: Dover Publications, Inc., 1958), pp. 10-14 参照。*Atom und Kosmos: Das Physikalische Weltbild der Gegenwart* (Berlin: Deutsche Buch-Gemeinschaft

G. m. b. H., 1930), pp. 23-41; *Atom and Cosmos: The World of Modern Physics* (London: George Allen & Unwin Ltd., 1932), pp. 33-48 にも、類似の記述が見られる。

(7) Adolf Grünbaum, *Geometry and Chronometry in Philosophical Perspective* (Minneapolis: University of Minnesota Press, 1968), pp. 12-13 参照。

(8) Erwin Schrödinger, *Expanding Universes* (Cambridge: Cambridge University Press, 1956), pp. 28-33 参照。

(9) Carnap, *Der Raum*, p. 15 参照。

(10) Ibid., pp. 47-59 参照。

(11) Carnap, *Philosophical Foundations of Physics*, pp. 146-8 参照。

(12) Grünbaum, *Geometry and Chronometry in Philosophical Perspective*, pp. 35-59; *Philosophical Problems of Space and Time* (London: Routledge & Kegan Paul Ltd., 1964), pp. 81-105 参照。

(13) Micheal Friedman, "Grünbaum on the Conventionality of Geometry," in Patrick Suppes (ed.), *Space, Time and Geometry* (Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company, 1973), pp. 217-33 参照。

(14) Ibid., p. 221 参照。

(15) John M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature* (New York: Springer-Verlag, 1997), p. 35 参照。

(16) Carnap, *Der Raum*, p. 43 参照。

(17) Ibid., p. 45 参照。

(18) Carnap, "Über die Abhängigkeit der Eigenschaften des Raumes von denen der Zeit," *Kant-Studien* (Berlin), Bd. 30, H. 3/4 (1925), pp. 331-45.

(19) Carnap, *Einführung in die Symbolische Logik, mit Besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen* (Wien: Springer-Verlag, 1954).