京都・顕真学苑論文集
（副題：カルナップと幾何学とに基づく数理哲学）

Kyoto-Kenshingakuen Collected Papers
The Mathematical Philosophy Based on Carnap and Geometry

第一論文
『言語の論理的構文論』における無限と構成主義
（２００５年７月執筆）

the first paper
The Infinity and Constructivism in *Logische Syntax der Sprache*

「『言語の論理的構文論』における無限と構成主義」の仏教的背景
The Buddhistic Background of
"The Infinity and Constructivism in *Logische Syntax der Sprache"*

京都・顕真学苑副幹（顕真）
the subeditor at Kyoto-Kenshingakuen (Kenshin)

Abstract

The Buddhistic Background of this paper is the following phrase in The Diamond Sūtra: "The tathāgata preaches, "The infinite universe that tathāgata preached is not universe." Hence it is said to be the infinite universe." This phrase on śūnyatā could be formulated, "A is not A. Hence A is A." In the Pure Land Sect, "Birth in the Pure Land of Amitābha-buddha" referred by Vasubandhu is interpreted as "Birth of Non-Birth." In this paper, "The Infinity and Constructivism in *Logische Syntax der Sprache,"* I demonstrate by the fixed-point lemma etc. that analyticity includes infinity in two

aspects. In the demonstration, I construct for the first time the following infinite logical sentence A on the basis of the above phrase in The Diamond Sūtra: A: … ““‘The logical sentence A is not analytic” is not analytic” is not analytic” … This infinite sentence is based on an impredicative definition. In the infinite logical sentence A, the part A is identified with the whole A, because the infinite logical sentence A includes infinite A itself. If the logical sentence A is analytic, then the logical sentence A is not analytic. If the logical sentence A is not analytic, then the logical sentence A is analytic. This infinite logical sentence A accurately represents the logical unification of antithetic concepts, the analyticity of non-analyticity.

本論文「『言語の論理的構文論』における無限と構成主義」（２００５年７月執筆）が生まれました契機は、２０００年５月頃に遡ります。当時出版されましたばかりの中村元『論理の構造』上巻を何気なく読んでおりました時、４１０頁におきまして、次の様な金剛経の一節が目に留まりました：「『如来が説かれたはてしない宇宙は宇宙ではない』と如来は説かれている。それだからこそ、〈はてしない宇宙〉と言われるのだ。」これは、「ＡはＡではない。だからＡはＡなのである。」という、空観の論理でございます。浄土真宗におきましても、天親菩薩の説かれる往生とは、不生の生、不往の往の意味とされております。私はこの空観の論理を、現代の数理論理学と整合する様に定式化するにはどうすれば良いのか、それ以来ずっと考えておりました。その後、私はこの論文「『言語の論理的構文論』における無限と構成主義」におきまして、従来より有限の段階で構成できる確実な概念とされておりました分析性の概念が、実は二つの点にて無限性を秘めておりますことを、不動点定理等を用いまして、立証いたしました。そしてその立証の際に、次の様な無限に続く論理的文Ａを構成いたしました。

Ａ：…「「「「論理的文Ａは分析的ではない」は分析的ではない」は分析的ではない」は分析的ではない」…

実は、この無限に続く論理的文Ａは、上記の空観の論理を鍵に作成したものなのでございます。即ち、論理的文Ａは、分析的であるならば、分析的ではなく、分析的ではないならば、分析的である、となるのでございます。無限に続く論理的文Ａは、非可述的定義による文でございますので、自身の中に無限である自身を含み、個と全体とが自己同一化しております。「無分別の分別」を真に的確に表現する論理的文として、ここにＡを構成いたします。Ａは分析性の概念に無限性が秘められているという事実と空観の論理とを明示しておりますので、Ａには無意味の意味があるとも言えます。私はこの論文において、相反するものの論理的統一、無限を包摂する有限、「無生の生」ならぬ「無分別の分

別」を、闇から光へ導き出したつもりでございます。本論文におきまして、分析性の概念が二通りに無限を包摂するという事実を、二つの無限に続く論理的文を構成することによって、初めて示しました。

また、本論文で私は、有限の手段を一つ一つ積み重ねる構成主義の方法と無限性とが矛盾しないことを、ゲーデルの構成可能集合の域を根拠に示しました。但し、たとえ無限が構成可能であるとしましても、無限の構成が、人間の理解可能な容量に収まるとは限りません。記述可能性と理解可能性には、間隙があるからでございます。しかし、記述（構成）に依らなければ、記述を超えた無限の理解に到達することができないこともまた事実でございまして、私は本論文にて、記述（構成）の価値と可能性に対する希望を示そうとしたのでございます。

カルナップ『言語の論理的構文論』(Rudolf Carnap, *Logische Syntax der Sprache*) には、独語版と英訳版のみが存在し、日本語訳も、日本語の研究書も、皆無であるとのことでございます。この書物は、記号と規則とから成る、無限を包摂する城である、と私は考えております。

京都・顕真学苑論文集
（副題：カルナップと幾何学とに基づく数理哲学）
Kyoto-Kenshingakuen Collected Papers
The Mathematical Philosophy Based on Carnap and Geometry

第一論文
『言語の論理的構文論』における無限と構成主義
（２００５年７月執筆）
the first paper
The Infinity and Constructivism in *Logische Syntax der Sprache*

京都・顕真学苑副幹（顕真）
the subeditor at Kyoto-Kenshingakuen (Kenshin)

Abstract

Carnap's indefinite rules of consequence and the indefinite concept of analyticity include infinity. This paper demonstrates for the first time that analyticity connotes infinity in two aspects by constructing two infinite logical sentences. In setting up Carnap's definition of analyticity, "reduction," "Bewertung" and "evaluation" are used to conclude the process in a finite number of steps. However, the concept of analyticity itself is denumerably infinite. First, it is indicated by the fixed-point lemma. A: … """The logical sentence A is not analytic" is not analytic" is not analytic" … This infinite sentence is based on an impredicative definition. In the infinite logical sentence A, the part A is identified with the whole A, because the infinite logical sentence A includes infinite A itself. If the logical sentence A is analytic, then the logical sentence A is not analytic. If the logical sentence A is not analytic, then the logical sentence A is analytic. This infinite logical sentence is constructed for the first time to represent appropriately the logical unification of antithetical concepts, the analyticity of non-analyticity. … """"The logical sentence A" is analytic in language S_1" is analytic in language S_2" is analytic in language S_3" … This second infinite sentence is based on the concentric language-regions that form an infinite series. Rosser said that "Carnap's rule" is non-constructive and that Rules of Kleene's type are clearly designed to give as much of the effect of Carnap's Rule as possible without sacrificing the constructive nature of the logic. The present paper, however, insists that the infinity is consistent with Carnap's constructivism. In fact, Gödel's universe of constructible sets is constructive and extended to transfinite orders. Any element of $M\omega_\omega$ is constructible$_{M\omega\omega}$. The proposition A “There exist no non-constructible sets” is true for models $M\omega_\omega$ and $M\Omega$. Impredicative definitions are also admitted by means of extension to transfinite orders. In addition, this paper shows that the syntactic concepts “Bewertung” and “Folge,” with reference to analyticity, are regarded as semantic concepts in several items of the literature. Tarski’s “satisfaction” and “a language of infinite order” are replaced by Carnap’s “Bewertung” and “gewisse konzentrische Sprachbezirke, die eine unendliche Reihe bilden,” respectively. Infinite language-regions are defined by finite languages. The theory of infinite language-regions is simpler than that of finite higher- order languages. The infinity can be constructed, though the construction of the infinity can not necessarily be contained within a capacity of human understanding because there is a gap between the possibility of description and that of understanding.

はじめに

『言語の論理的構文論』（1）は、ウィーン学団のカルナップによって、１９３４年に出版された（2)。執筆の目的は、科学の全体を、自分の作った形式的言語の構文論で表現することである。即ち、科学の全体を包摂するまで、自分の形式的言語を常に拡張することを希望して、書かれた書物である。ただしこの書物は、無限性の上に築かれる概念を秘めている。それは、不確定的な帰結の概念、そして、言語の無限の階層によって定められる、分析性の概念である。

カルナップは、不確定的な概念である分析性の概念を、厳密に定式化することを望んでいる。不確定的な言語Ⅱにおいて分析性を定義する際には、「還元（reduction)」と「付値（Bewertung, valuation)」と「数値評価（evaluation)」という手続きによって、量化子のないマトリックスに還元し、有限の段階で数値評価の過程の結論が出るように、諸規則を定めている（3)。カルナップは分析性の概念を、不確定的な概念ではあっても、個別の場合においては有限の手順で判断可能な概念としている。

しかし、分析性の定義が、言語の無限の階層において、可算無限的に不確定的な概念であることも事実である。それは、所謂不動点定理を応用することによって、「非可述的（imprädikativ)」に示すことができる、と私は考える。その無限の構成はこれまでになく、本論文の第３節にて初めて示されるものである。本論文において、分析性の概念が二通りに無限を包摂するという事実を、二つの無限に続く論理的文を構成することによって、初めて示す。また、確定的な言語Ｉにおいて分析性を定義する場合にも、無限を包摂する不確定的な帰結規則が立てられる。カルナップが直観主義的立場に立っていることを念頭に置く

と、これは彼の構成主義的態度と一見矛盾しているようにも見えなくはない。例えば、バークリー・ロッサーの１９３７年の論文では、不確定的な帰結規則が、「カルナップの規則」として紹介されている。そして、「カルナップの規則」をそれ自体としては非構成的なものとし、これに対して、クリーネの規則は、構成的性格を犠牲にすることなく、カルナップの非構成的規則の効果を可能な限り多く与えるように、構成されている、と述べている。しかし、不確定的な帰結規則を始めとするカルナップの分析性に関する諸規則は、無限を含んでいるからといって、構成主義と矛盾するとは限らない。その根拠として、私は、ゲーデルの構成可能集合の「域（universe）」を取り上げる。この構成可能集合の域は、第３節にて本論文で新しく構成する、分析性についての非可述的な無限の構成の正当化の基盤にもなり得るため、ここに根拠として導入するのは妥当である、と考える。

本論文では、カルナップの分析性の定義に関連する諸概念は、無限を包摂しているが、それは構成主義的態度と矛盾するものではない、ということを示す。そのために、先ず第１節で、『言語の論理的構文論』の分析性の定義を巡る一連の議論を、概括的に解説する。『言語の論理的構文論』においては、帰結や付値は構文論的概念とされているが、後世の他の文献においては意味論的概念とされていることも多々ある。第２節では、幾つかの文献を取り上げて、この点を説明する。次いで第３節において、分析性の概念が如何に無限的であるのかを、不動点定理を用いて、非可述的且つ可算無限的な文を構成して明らかにする。この構成は従来にはなく、本論文にて新しく形成されるものである。第３節にて構成される二つの無限に続く論理的文を前提に、第４節では、ロッサーの１９３７年の論文の骨子と、ゲーデルの構成可能集合の域についての見解を説明し、それが前節の分析性についての非可述的な構成を正当化することと、無限と構成主義とは矛盾しないこととを明確にする。分析性は、可算無限的に不確定的な概念として、構文論言語の極限に位置づけられる。構文論における分析性は、いわば、超準解析において理想元として導入された、無限大元に近しい(4)。無限は構成可能なものとして、『言語の論理的構文論』の中に、問題なく包摂される。本論文で示すべきはこれらの論点である。

１.『言語の論理的構文論』における言語の諸定義

［1］言語 I

言語 I は、自然数の直観主義的（有限的）算術を含んでいる。言語 I の形成規則については、１１個の個別記号、変項、定数項、述語、函手の五種の記号が使用される。連結記号（論理結合子)、普遍文と存在文、K 演算子がある。言

語Ｉの変換規則については、１１個の原始文の図式、４個の推論規則がある。帰結規則における直接的帰結の条件は２つである。言語Ｉは有限的という意味で確定的であるので、言語Ｉの構文論は言語Ｉそれ自身において公式化される（5)。言語Ｉの一般的用語と、数項表現と文と定義とを定める形成規則と変換規則は、ゲーデルの体系（6）と近似する（7)。

［２］言語Ⅱ

言語Ⅱは不確定的であり、変数の範囲を制限しない非制限的演算子が用いられる。還元公理のない単純タイプ理論が使用される。数項表現と文に対する形成規則と定義に対する形成規則があり、２３個の原始文がある。そして推論規則は２個であり、導出可能、証明可能等は、言語Ｉと同じである。導出方法は、原始文と推論規則とから成り、そのどちらも有限である。導出方法が規定される十分に豊かな体系において、証明可能でも論駁可能でもない文が構成できる。特に、数学が公式化可能なあらゆる体系に対して、古典数学の意味において妥当であるが、その体系の内部では証明可能ではない文を構成することができる。不確定的な個々の段階に依存し、前提の数が有限である必要のない演繹方法を帰結列と呼ぶ。導出は文の有限な列であるが、帰結列は、必ずしも有限ではないクラスの有限な列である。（第４節で詳述するように、カルナップの帰結規則は、ロッサーの１９３７年の論文に、「カルナップの規則」として取り上げられている。）

言語Ｉでは、推論規則の拡張によって「帰結」を定義し、それによって「分析的」と「矛盾的」とを定義する。言語Ⅱでは、「分析的」と「矛盾的」とを定義し、それによって「帰結」を定義する。そのために「還元」と「数値評価」を用いる（8)。カルナップは、無限に不確定的な概念である「帰結」や「分析的」を、有限の語で捉えようとしている。

［３］還元

還元と付値は、不確定的言語において、有限の段階で結論に至るための手続きである。先ず、還元の概念を明確にする。還元によって、言語Ⅱのすべての文は、或る（大抵、より単純な）標準的形式に、一義的に変換される。RR1（第１の還元規則、以下同様）では、すべての定義された記号は、その定義によって除去される。RR4 では、すべての制限された∃演算子は、GⅡ9 によって削除される。RR6 では、命題変数 s の除去、RR7 では、K 演算子の除去が規定される。文が還元されると呼ばれるのは、還元規則の内のどれも、最早それに適用することができない時である。諸規則の、文 S_1 への適用は、常に、有限回の段階によって最終的な形式に、即ち還元された文に至る。これを、S_1 の「還元文

（reductum）」と呼び、その構文論的指示は'^{R}S'である。定理によれば、S_1 と $^{R}S_1$ とは常に相互に導出可能であり、すべての原子的文（しかし、すべての分子的文ではない）は還元される。

［４］数値評価

或る形式の文が分析的文と呼ばれるのは、それと関わりを持つある種の他の文が或る諸条件を満たすときである、というような具合に、諸規則が規定される。不確定的言語Ⅱにおいて分析性を定義するには、この一連の過程が、有限回の段階で終わりになるように、これを行わなければならない。数変数 z_1 が、例えば、S_1 において自由変数として生じるならば、形式 $S_1(^{z_1}{}_{St})$のすべての文が分析的である時、そしてその時に限り、S_1 を分析的と呼ぶ。このように、例えば'P_1(x)'から、無限の命題的クラス｛'P_1(0)', 'P_1(0')', 'P_1(0'')', …｝の文に言及する。この方法において、数変数は除去される。しかし述語変数と函手変数の場合は、類似の方法は成功しない。S_1 を例えば'M(F)'（「M はすべての性質に対して真である」）とする。文'M(P_1)'、'M(P_2)'など、すべてのこれらの文は真であるけれども、'M(F)'がそれにも拘わらず偽であることがあり得る――それに対して、述語を言語Ⅱにおいて定義することができない或る性質に対して、M が効力を持たない限りにおいて。ゲーデルの研究の結果として、例えば、あらゆる算術的体系に対して、定義可能ではない数的性質があるか、或いは、還元すれば、定義不可能な実数があることは確かである。ゲーデルの提案に従い、'M(F)'が分析的と呼ばれるのは、言語Ⅱにおいて可能な諸定義の制限された領域に拘わらず、すべての数的性質に対して M が適用できる場合に限る、と言うように、「分析的」を定義する。

このように、述語変数 p の場合、代入に言及することはできず、異なる方法で進まなければならない。'F'を、S_1 において唯一の自由変数として、例えば、項数１、段階数１の述語変数として生じるとする。そして、先に述べた理由により、このタイプの定義された述語は考察しないが、その代わり、'F'に対するすべての可能な付値を考察する。'F'に対する可能な付値（構文論的指示 B）によって、アクセントの付いた諸表現のクラス（構文論的性質）を、ここで理解する。もし付値 B_1 が、この種の'F'に対する特定の付値であるならば、そして S_1 の任意の場所で、その項としての St_1 と共に'F'が生じるならば（例えば、部分的文 'F(0'')'）、この部分的文は、St_1 が付値 B_1 の要素であるならば、付値 B_1 のために真であり、そうでなければ偽である。B_1 に基づく S_1 の数値評価とは、St_1 が B_1 の要素であるならば、言及された部分的文が N によって置き換えられ、そうでなければ～N によって置き換えられる、S_1 の変換である、と理解される。「分析的」の定義は、'F'に対する任意の付値に基づく数値評価によって S_1 から

結果するすべての文が分析的である場合、そしてその場合に限り、S_1 が分析的と呼ばれるような具合に、構成される。他の p タイプに対しても、類似した規則が規定される。段階数１、項数１の自由な函手変数に対する付値は、それによって、すべての St に対して 1 つの St が一義的に互いに関係付けられる相互関係に存する。函手変数 f_1 に対する或る付値 B_1 に基づく文の数値評価の場合、B_1 によって St_1 に互いに関係付けられる St_2 によって、部分的表現 $f_1(St_1)$を置き換える。他の f タイプに対しても、類似した規則が規定される。

先の考察に基づいて、最初に付値規則 VR1 と VR2 が規定され、そして数値評価規則 EvR1 と EvR2 が規定される。そして更に、これらと関連して、「分析的」と「矛盾的」の定義が公式化される。付値を割り当てることのできる諸記号は「付値可能（bewertbar)」な記号と呼ばれる（構文論的指示 b)。S_1 を、演算子のない還元された文とする。そして、S_1 におけるすべての付値可能な記号 b に対する付値を、VR1 に従って選び、そして更なる諸表現に対する付値を、VR2 に従って決める。その時、S_1 の数値評価は、付値に基づく、数値評価の規則 EvR1、EvR2 による変換に存する。還元されていない文が変換から結果するならば、それは第 1 に還元されなければならず、そしてそれから更に変換されなければならない。定理 34c.1 によれば、S_1 を、演算子のない還元された文とすると、S_1 の付値は、付値可能な記号 b に対する任意の諸付値に基づいて、あらゆる場合において、有限数の段階で、最終的な結果に至る。これは N であるか～N であるかのどちらかである。

［５］S において分析的

言語Ⅱに関する「分析的」と「矛盾的」の定義は、言語 I に関する場合よりも複雑化されている。還元と数値評価に関する先の規定に基づいて、言語Ⅱに対するこれらの諸定義は、諸規則 DA1 から DA3 において具体化される。このとき、語言語（Wortsprache）における「分析的」の定義は、厳密に形式化された構文論言語（Syntaxsprache）に翻訳できるか、そして、言語Ⅱそれ自身は、この目的のために構文論言語として用いることができるか、という問いが浮上する。後に（定理 60c.1)、いかなる無矛盾の言語 S に対しても、「S において分析的」の定義は、構文論言語としての S 自身において公式化することができない、ということが示される。対象言語として言語Ⅱ全体ではなく、単一の同心円的な領域を取るならば、構文論言語のために言語Ⅱの範囲の外に出る必要はない。概念「言語II_nにおいて分析的」は、任意の n に対して、構文論言語としての言語II_n自身において定義可能ではない。しかし、より拡張した領域である言語II_{n+m}において常に（恐らく、言語II_{n+1}において常に)、定義可能である。

２．構文論的概念としての「付値」と「帰結」

カルナップの「付値」の概念は、タルスキの「充足」の概念に近似するが、「付値」を構文論的概念とするのは、『言語の論理的構文論』のみではない。例えば、ラシオワとシコルスキーの『メタ数学の数学』やベートの『数学の基礎』においても、それは純粋に構文論的な概念として扱われている。

『メタ数学の数学』の場合には、クラスKでの代数Aにおける構文論的「付値」とは、V_0が0階の言語L_0におけるすべての命題変数の集合である場合の、カルテシアン積 A^{V_0} の任意の点 $v=\{v_a\}_{a\in V_0}$ と理解される（9)。換言すると、Aにおける「付値」とは、写像$v: V_0 \to A$である。空でない集合Jにおける言語Lの「付値」とは、カルテシアン積J^Vの任意の要素$v=\{v_x\}_{x\in V}$、すなわち任意の写像$v: V \to J$と理解される。この場合Vは、言語Lにおけるすべての個別変数の集合を指示する。公式aがRにおいて充足可能であるとされるのは、aを充足するRにおける付値vが存在する場合である。

『メタ数学の数学』において、すべての帰結演算は、以下のように構文論的に定義される。Lを1階あるいは0階の形式化された言語とする。トートロジー（論理的公理）の集合A_1を定め、推論規則の集合$R_1, \cdots, R_k$を定める。Lにおける公式のあらゆる集合Sに対して、推論規則$R_1, \cdots, R_k$とA_1におけるトートロジーによってSから導出できる（Lにおける）すべての公式の集合として、C(S)を定義する。Lにおいてこの様に定義される帰結演算Cは、推論規則$R_1, \cdots,$ R_kと論理的公理の集合A_1によって決定される、と言う。

次に、『数学の基礎』の場合には、構文論的「付値」は、各々の公式Uに、4個の条件によって、値W(U)=2或いはW(U)=0を割り当てるあらゆる関数のことである。「付値」とは、原子に値を割り当てることであり、したがってそれは一意的に決定される。構文論的な「数値評価」については、先ず次のようなメタ数学的な表記法を導入する。即ち、(A) 0^0は0となる。(B) $(n+1)^0$は$S(n^0)$となる。gがk項の関数変数であるならば、式$g(m_1{}^0, m_2{}^0, \cdots, m_k{}^0)=n^0$は、項の値$m_1, m_2, \cdots, m_k$に対する、gによって表現される関数$\phi$の「数値評価」と呼ばれる。

これらに対して、エンダートンの『論理学の数学的序説』においては、「帰結」は意味論的概念とされる。文の集合Σに対して、ModΣを、Σのすべてのモデルのクラスと定義する。ThModΣは、Σのすべてのモデルにおいて真であるすべての文の集合である。しかしこれは、Σによって論理的に含意されたすべての文の集合に過ぎない。この集合を、Σの帰結の集合と呼ぶ。例えば、集合論は、集合論に対する公理として知られる文の或る集合の帰結の集合である。

『数学の基礎』においても、論理的帰結は意味論的概念とされる。公式Uが

公式の集合aの論理的帰結と言われるのは、付値wがaにおけるすべての公式Xに対して妥当であるときは常に、それがUに対して妥当である場合である。論理的帰結の概念は、タルスキによって、導出可能性の構文論的概念に対する意味論的対応物として、導入されたものである。

但し、私見によれば、意味論の「付値」、「帰結」等の概念を、構文論に置き換えて、構文論のみで語ることには、「意味について語る」という大きな危険を冒すことがなく、外部世界から閉じた世界が成立する、という利点がある(10)。

３．分析性の概念に秘められた無限性

分析性の定義は、第１節で解説したように、有限的に構成できるかのように見える。しかし、分析性の概念が無限を内蔵することを示すこともできる。分析性の定義不可能性には、言語Ⅱにおいてのゲーデルの不完全性定理の証明の際に用いられた、所謂不動点定理が応用できる（11)。不動点定理とは、単純に言うと、任意の構文論的性質に対して、それ自身がその性質を持つ、とそれ自身について主張する文が構成できる、とする定理である。加えて、ルディー・ラッカーの言うように、「この文は真ではない」という文は、無限に循環的なものである（12)。この二つを用いて、論理的文は分析的か矛盾的かのどちらかであることを前提し（『言語の論理的構文論』は、直観主義的立場にありながら、排中律を認める構成を取っているのである)、この構成を分析性の概念に適用し、それを一般化すると、次の様な A という文を初めて作ることができる、と私は考える。

A：…「「「「論理的文 A は分析的ではない」は分析的ではない」は分析的ではない」は分析的ではない」…

「は分析的ではない」」と左側の括弧（「）はそれぞれ、少なくともω回続く。ωには有限の順序数の加法や乗法の規則は適用されず、1+ω=ωなので、原則として、ωには偶数も奇数もない。しかし、ωは加法や乗法については可換ではなく、ω+1 はωではなくω+1 であり、また、2・ω=ωであり、ω・２=ω＋ωなので、仮に偶数と奇数の区別があるとするならば、以下の説明により、この場合に限り、偶数であると考えられる。偶数のみとする点が、ラッカーの構成と異なる所である。この A の構成は非可述的な定義、即ち、定義される対象が所属する全体に言及することによってのみ、一義的に特徴付けられる定義である（13)。

このAの構成の具体的手順は、次の通りである。先ず、「論理的文ａは分析的

ではない」という論理的文 a を考える。論理的文は分析的であるか矛盾的であるかのどちらかであるため、論理的文 a が分析的であるならば、論理的文 a は分析的ではない。論理的文 a が分析的ではないならば、論理的文 a は分析的である。加えて、論理的文 a は、自己言及的であるので、「論理的文 a」にそれ自身を代入しても、この状況は変わらない。そこで、

a:「「論理的文 a は分析的ではない」は分析的ではない」
a:「「「「論理的文 a は分析的ではない」は分析的ではない」は分析的ではない」は分析的ではない」

このように、「は分析的ではない」」と左側の括弧(「)はそれぞれ、n 回目の代入で、2^{n-1} 個増える(n は1以上の自然数)。この代入は、可算無限的に続き、A という文が構成できる(14)。無限に続く論理的文 A は、非可述的定義による文であるため、自身の中に無限である自身を含み、個と全体とが自己同一化している。相反するものの論理的統一、無限を包摂する有限、「無分別の分別」を真に的確に表現する論理的文として、ここに A を初めて構成する。

以上が、分析性の概念における無限性の、一つの側面である。次に、そのもう一つの側面を見ることにする。

カルナップは、階層構造を言語Ⅱに当てはめて、言語Ⅱは無限の同心円的言語領域$Ⅱ_1$、$Ⅱ_2$、…を含むとしている。これはタルスキの無限のオーダーの言語に相当する(15)。分析的真理は、無限の同心円的言語領域$Ⅱ_1$、$Ⅱ_2$、…における、言語の枠組みによる真理であるため、「分析的」を可能な限り正確に定義しようとするならば、更に次のように一般化される(16)。

…「「「「論理的文 A」は言語 S_1において分析的である」は言語 S_2において分析的である」は言語 S_3において分析的である」…

これは言語 S_ωを超えて続く。この様に、分析性と実無限とは、極めて近しい概念である。カルナップは、数の存在の問題を、言語的形式の問題に還元しているが、そうしながらも、言語的枠組みを超えた無限の存在を、この書物にそっと忍び込ませたかの如くである。無限の列の同心円的言語領域において、分析性の概念の定義は、構文論の極限にある(17)。

4．ロッサーの論文の骨子とゲーデルの構成可能集合の域

分析性の定義を立てるに当たり、カルナップは、可算無限的に不確定的な、

様々な諸規則を用いる。ロッサーは、１９３７年の論文（18）において、カルナップの諸規則の内、「f(0), f(1), f(2), … がすべて証明可能であるならば、(x)f(x)は証明可能である」という規則を、「カルナップの規則」と呼ぶ。ロッサーの１９３７年の論文では、プリンキピア・マテマティカとペアノの諸公理の体系に、カルナップの規則をω^2回未満当て嵌める事によって得られる論理を考える。カルナップの規則のω回の応用によって得られる論理は、カルナップの規則の下で閉じていないことが示される。

ロッサーは、上記の論文において、体系P_αを構成している。その体系において、彼は、カルナップの規則の正確な定義を、「Subst a($^{v}0$), Subst a($^{v}f0$), Subst a($^{v}ff0$), … ならば、vΠ(a)である」として与えている。P_0は、ゲーデルがPと呼んだ論理であり、推論規則と自由変数の普遍量化の規則とを、それぞれ規則１、規則２と呼ぶ。様々なP_αが、超限帰納のタイプによって、αの任意の順序数に対して定義される。P_αが定義されるならば、Subst a($^{v}0$), Subst a($^{v}f0$), Subst a($^{v}ff0$), … が、P_αの証明可能な諸公式に生じるような具合に、すべての諸公式vΠ(a)を加えることによって、P_αの証明可能な諸公式の集合を拡張する。この拡張された集合を含み、規則１と規則２の使用の下に閉じている諸公式の最小の集合を、$P_{\alpha+1}$とする。P_αは、カルナップの規則のα回の使用を許容することによって得られる論理である。

以上に加えて、ロッサーは、更にクリーネの規則KΩを導入する。クリーネの規則KΩとは、次のようなものである。

> 規則KΩ：もしxがP_Ωにおいて証明可能であるとする公式Pv_Ω(x)があるならば、その数がxである公式がある。

規則KΩは、クリーネによって最初に研究されたタイプの規則である。クリーネのタイプの諸規則は、論理の構成的性格を犠牲にすることなく、カルナップの規則の効果を可能な限り多く与えるように、明確に作られている（19)。

ロッサーは、クリーネの規則において、カルナップの不確定的規則の効果は、論理の構成的性質を損なうことはない、とする。しかし、分析性を定義する際のカルナップの様々な不確定的規則それ自体は、「非構成的規則」であるとしている（20)。この見解は、カルナップの構成主義的態度と矛盾するかのように見える。

しかし、無限は必ずしも、構成主義と矛盾するものではない。ゲーデルの構成可能集合の域は、構成的でありながら、超限オーダーにまで拡張することが可能である。ゲーデルの１９３９年の論文（21）によれば、構成可能集合の域の定義は、

１．$M_0＝\phi$、

２．$M_{\alpha+1}$は以下の諸概念のみを含む命題関数によって定義できるM_αの副集合の集合である：～、∨、∈関係、M_αの諸要素、範囲M_αを伴う諸変数のための量化子、

３．極限数βに対して、$M_\beta＝\Sigma_{\alpha\subset\beta}M_\alpha$である。

集合Sが構成可能と呼ばれるのは、$S\in M_\alpha$である様な順序数αが存在する場合である（22)。

本論文の第３節にて私が構成した分析性についての文 A は、非可述的な文である。事物が非可述的であると呼ばれるのは、それが属する全体によってのみ、それが定義される場合である。非可述的な定義は、悪循環を生むという理由で、ラッセルやカウフマンによって排除される（23)。しかしゲーデルの論文（１９３８年）（24）によると、超限オーダーに拡張された構成可能集合を作ることによって、集合論の非可述的な公理は充足される。また、ゲーデルの論文（１９４４年）（25）によると、構成可能集合における或る大きな順序数αは、非可述的な形成を前提する。

ゲーデルの諸論文における構成可能性について、以下に具体的にみる。ゲーデルの１９３９年の別の論文（26）によれば、集合論に対するモデルと考えられる$M\omega_\omega$が、選択公理を除くツェルメロのすべての公理を満たし、そしてM_Ω（Ωは最初の到達不可能な数）がそれに加えて代入公理を満たすのは、双方の場合において、それぞれ「確定的な性質」及び「確定的な関係」が、(それぞれ一つ、及び二つの自由変数を持つ)「すべての集合のクラスへの命題関数」と同一視される場合である。

命題Aを、命題「非構成的集合は存在しない」を表示するものとする。「構成可能$_M$」を、集合のモデルMに対して関係付けられた（即ち、モデルの∈関係によって定義された）「構成可能集合」の概念を表示するものとする。すると、$M\omega_\omega$の任意の要素は構成可能$_{M\omega_\omega}$であり、命題 A「非構成的集合は存在しない」は、モデル$M\omega_\omega$とM_Ωにおいて真である。

ゲーデルの１９３８年の論文に従い、(27)、T を、〈フォン・ノイマンの体系 S*（28）から選択公理を除くことによって得られる集合論の諸公理の体系〉とする。「構成可能集合」の「構成可能」は、非可述的な手続きを排除する、半直観主義的意味において理解される。「構成可能集合」は、〈ラッセルのタイプの分岐した階層を超限オーダーを含むように拡張する場合に得られる集合〉と定義される。命題A「すべての集合は構成可能である」は、Tの諸公理と矛盾しないことが証明できる。というのは、命題 A は、構成可能集合から成るモデルに

対して真だからである。ゲーデルの１９３８年と１９４４年（29）の論文によれば、超限オーダーへの拡張を認めると、還元公理が証明できるので、モデルは集合論の非可述的な諸公理を満たす。

　このように、無限と構成可能性は共存し得るので、カルナップの不確定的な帰結規則や、それ自体不確定的な分析性の概念は、確かに無限を包摂するが、それは構成主義と矛盾しない。無論、たとえ無限が構成可能であるとしても、無限の構成が、人間の理解可能な容量に収まるとは限らない。

註

（1）Rudolf Carnap, *Logische Syntax der Sprache* (Wien: Verlag von Julius Springer, 1934); *The Logical Syntax of Language* (London: Routledge & Kegan Paul, 1937).

（2）１９３４年の時点では、カルナップが１９３３年１２月に送った原稿のすべてが出版された訳ではない。それらが公表されたのは、１９３７年に出版された英訳版においてである。但し、１９３４年の独語版には、１９３７年の英訳版では削除された記述も、随所に見られる。

（3）原語が英語・ドイツ語の混在した形になっているのは、「還元」と「付値」と「数値評価」に関する記述が、『言語の論理的構文論』の英訳版にしか存在しないにも拘わらず、「付値」のみにドイツ語表記が付されているためである。

（４）Abraham Robinson, *Non-Standard Analysis* (Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1966); “Germs,” in W. A. J. Luxemburg (ed.), *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability* (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969), pp. 138-49 参照。

（5）Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, §18 参照。

（6）ゲーデルの体系については、Kurt Gödel, *Collected Works*, ed. Solomon Feferman et al. (New York: Oxford University Press, 1986–2003), i. pp. 144-95（以下、“*Works*”と略記する）と、G. T. Kneebone, *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics* (London: D. Van Nostrand Company Limited, 1963), pp. 229-42 参照。

（7）カルナップは、言語的枠組みを超えた概念についての問題を、原則として扱わない（Warren Goldfarb and Thomas Ricketts, “Carnap and the Philosophy of Mathematics,” in David Bell and Wilhelm Vossenkuhl (eds.), *Wissenschaft und Subjektivität: Der Wiener Kreis und die Philosophie des 20. Jahrhunderts* [Berlin: Akademie Verlag, 1992], p. 68 参照）。あらゆる問題の基本となる言語的枠組み、即ち構文論が算術化されているのは、次の理由による。

　エンダートン（Herbert B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic* [2nd edn., San Diego: A Harcourt Science and Technology Company, 2001]）によれば、この算術

化は、数についての事実を表現することによって、公式についての事実を表現する公式を構成する能力を与える。このような能力は、定義不可能性や決定不可能性の結果を得るために開発される。エンダートン自身は、ゲーデル数に関わる様々な諸関係や諸関数が、理論 CnA_E において表現可能であることを示している（CnA_E とは、集合 A_E の帰結の集合のことであり、A_E は、１１個の諸公理から成る集合である）。彼によれば、関係は、理論 CnA_E において表現可能である場合、そしてその場合に限り、再帰的である。そして任意の再帰的関係は、数論（N; 0, S, ＜, ＋, ・, E）において定義可能である。諸表現にゲーデル数を割り当てると、N における決定可能な関係（諸表現についての構文論的概念に関して）は、理論 CnA_E において表現可能である。また、算術化によって、定義不可能性や決定不可能性や不完全性も導かれる。公式についてのこれらの事実を明らかにするために、『言語の論理的構文論』において、構文論の算術化が必要とされると思われる。

（8）「帰結」は Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic* や Evert W. Beth, *The Foundations of Mathematics* (Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1959) においては、意味論的用語として規定されている。Helena Rasiowa and Roman Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics* (Warsaw: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1963)では、「帰結」は構文論的用語とされている。また「付値」は、Beth, *The Foundations of Mathematics* や Rasiowa and Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics* においても、構文論的用語として規定されている。 詳細は本論文第 2 節参照。

（9） 0 階の言語の説明については、Rasiowa and Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics*, pp. 166, 210, 473 etc.を参照。

（10） 意味論の重要性については、Jaakko Hintikka, "Carnap's Work in the Foundations of Logic and Mathematics in a Historical Perspective," *Synthese*, 93 (1992), pp. 167-89 に述べられている。

（11）「不動点定理」という用語は、カルナップ自身が用いている訳ではない。しかし、Sahotra Sarkar, "'The Boundless Ocean of Unlimited Possibilities': Logic in Carnap's *Logical Syntax of Language*," *Synthese,* 93 (1992), pp. 191-237 が明示したように、カルナップが『言語の論理的構文論』の中でこの定理を用いたことは、確かである。

（12） Rudy Rucker, *Infinity and the Mind: the Science and Philosophy of the Infinite* (Boston: Birkhäuser, 1982), p. 145 参照。

（13）非可述的な定義については、Stewart Shapiro, *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics* (Oxford: University Press, 2000)と、Charles S. Chihara, *Ontology and the Vicious-Circle Principle* (Ithaca: Cornell University Press, 1973)と、

José Ferreirós, *Labyrinth of Thought: A History of Set Thory and Its Role in Modern Mathematics* (Basel: Birkhäuser Verlag, 1999), p. 383 等を参照。

（14）因みに、ラッカーの構成では、「は分析的ではない」」と左側の括弧（「）の数がそれぞれ奇数であることを、容認することになる。

（15）無限のオーダーの言語とカルナップの言語との関わりについては、Alberto Coffa, "Carnap, Tarski and the Search for Truth," *Noûs,* 21 (1987), p. 561 参照。

（16）無限の同心円的言語領域については、Michael Friedman, "Logical Truth and Analyticity in Carnap's '*Logical Syntax of Language*'," in William Aspray and Philip Kitcher (eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics* (Minneapolis: University of Minnesota Press, 1988), pp. 82–94 と、Thomas Oberdan, "The Concept of Truth in Carnap's *Logical Syntax of Language*," *Synthese*, 93 (1992), pp. 255-6 にも、論じられている。フリードマンに対する反論については、David DeVidi and Graham Solomon, "Tolerance and Metalanguage in Carnap's *Logical Syntax of Language*," *Synthese*, 103 (1995), pp. 123-39 参照。

（17）無限の言語領域は、有限の言語で定義でき、G. Kreisel, "Choice of Infinitary Languages by means of Definability Criteria; Generalized Recursion Theory," in *The Syntax and Semantics of Infinitary Languages* (Berlin: Springer-Verlag, 1968), pp. 139–51 によれば、無限列の言語領域の理論は、有限の高階言語の理論よりも単純である。

（18）Barkley Rosser, "Gödel Theorems for Non-Constructive Logics," *The Journal of Symbolic Logic,* 2 (1937), pp. 129-37.

（19）クリーネの規則とは、具体的には、次のようなものである。

規則 K1：すべての z に対して、$\mathrm{Sb}(x^{y}{}_{Z(z)})$ が P_0 において証明可能であるとする公式があるならば、その数が y Gen x である公式がある。

規則 Kn＋1：すべての z に対して、$\mathrm{Sb}(x^{y}{}_{Z(z)})$ が P_0＋規則 Kn において証明可能であるとする公式があるならば、その数が y Gen x である公式がある。

規則 Kω：各々の z に対して、$\mathrm{Sb}(x^{y}{}_{Z(z)})$ が P_0＋規則 Kn において証明可能であるような n が存在するとする公式があるならば、その数が y Gen x である公式がある。

規則 KΩ＋1：すべての z に対して、$\mathrm{Sb}(x^{y}{}_{Z(z)})$ が P_0＋規則 KΩ において証明可能であるとする公式があるならば、その数が y Gen x である公式がある。

（20）Rosser, "Gödel Theorems for Non-Constructive Logics," p. 129 参照。

（21）Kurt Gödel, "The Consistency of the Generalized Continuum Hypothesis," in *Works*, ii. p. 27 参照。

（22）構成可能集合の域については、Ferreirós, *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, pp. 382-5 参照。

(23) この件については、Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, p. 117 参照。

(24) Kurt Gödel, "The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis," in *Works*, ii. p. 26 参照。

(25) Kurt Gödel, "Russell's Mathematical Logic," in *Works*, ii. p. 136 参照。

(26) Kurt Gödel, "Consistency Proof for the Generalized Continuum Hypothesis," in *Works*, ii. pp. 28-32 参照。

(27) Gödel, "The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis," pp. 26-7 参照。

(28) フォン・ノイマンの体系については、John von Neumann, "Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre," in idem, *Collected Works: Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics,* ed. A. H. Taub (New York: Pergamon Press, 1961), i. pp. 494-508 と、Abraham A. Fraenkel and Yehoshua Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory* (Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1958), pp. 96-111 と、Ferreirós, *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics,* pp. 370-82 等を参照。

(29) Gödel, "Russell's Mathematical Logic," p. 136 参照。