京都・顕真学苑論文集
（副題：カルナップと幾何学とに基づく数理哲学）
Kyoto-Kenshingakuen Collected Papers
The Mathematical Philosophy Based on Carnap and Geometry

第五論文
カルナップの言語構築における第三の無限の知恵の樹
（２００８年７月執筆）
the fifth paper
The Third Infinite Tree of Wisdom in Carnap's Construction of Language

「カルナップの言語構築における第三の無限の知恵の樹」の仏教的背景
The Buddhistic Background of
"The Third Infinite Tree of Wisdom in Carnap's Construction of Language"

京都・顕真学苑副幹（顕真）
the subeditor at Kyoto-Kenshingakuen (Kenshin)

Abstract

The Buddhistic background of this paper is an important doctrine in the T'ien-t'ai (Tendai) Sect: "The three thousand realms are contained in one mind" (Mo-ho-chih-kuan).
3000 realms = 10 realms (jikkai) × 10 realms (jikkai) × 10 factors (jūnyoze) × 3 realms of existence.
In the True Pure Land Sect, "The world of the minutest particles is replete with the tathāgata. The tathāgata is the mind of the sea of all multitudinous beings." This paper,

“The Third Infinite Tree of Wisdom in Carnap’s Construction of Language,” discloses for the first time three secret infinite trees of wisdom in Carnap’s constructions of language and space. The newly constructed third infinite treelike system is the space of speculation that is vacant because of the system’s formality and is able to include infinite theories. Carnap’s systems are generally regarded as static, but this third dendriform system is flowing, transforming, and comprehends infinite theories. One of the reasons why three types of secret infinite trees of wisdom are constructed in this paper is based on the Buddhistic background, viz., “The three thousand realms are contained in one mind” (Mo-ho-chih-kuan).

本論文「カルナップの言語構築における第三の無限の知恵の樹」（２００８年７月執筆）の仏教的背景は、『摩訶止観』巻第五上「夫一心具十法界。一法界又具十法界百法界。一界具三十種世間百法界即具三千種世間。此三千在一念心。若無心而已。介爾有心即具三千。」（夫れ一心に十法界を具す。一法界に又十法界を具すれは、百法界なり。一界に三十種の世間を具すれは、百法界に即ち三千種の世間を具す。此の三千は一念の心にあり。若し心無くは已みなん、介爾も心有れは即ち三千を具す。）即ち、一念三千でございます。先ず、地獄、餓鬼、畜生、阿修羅、人間、天上、声聞、縁覚、菩薩、佛の十界のそれぞれに十界が備わり（十界互具）、百界となります。それに、相、性、体、力、作、因、縁、果、報、本末究竟の十如是のあり方をかけますと千となり、そして、衆生世間、五陰世間、国土世間の三種世間をかけますと、三千となります。一念三千とは、一念、即ち一瞬の心の中に、三千世界が含まれているという考え方でございます。浄土真宗におきましても、『唯信鈔文意』に、「この如来、微塵世界にみちみちたまへり、すなはち一切群生海の心なり。」とございまして、信心とは仏性即ち如来であって、微塵世界に満ちるものであるとされております。

カルナップの様々な言語的空間的構築全般には、三種類の隠れた無限の知恵の樹があるという事実を、本論文にて初めて指摘いたします。カルナップ自身は無限の知恵の樹を明記している訳ではなく、知恵の樹という言葉さえも使用しておりません。本論文にて初めて、三種の無限の知恵の樹が表現されるのでございます。

三種類の隠れた無限の知恵の樹を構成しました理由の一つは、一念三千が仏教的背景であるからということに基づいております。特に第三の無限の知恵の樹は、樹木構造を持つというよりは、正確には無限に分岐する樹状の束構造を持つものでございますが、それはカルナップの諸文献には全く記されておりませんので、本論文にて初めて明確に構成する必要がございます。新しく構築される第三の無限の樹状体系は、体系の形式性故に中空性を持つ、無数の理論を

包摂し得る思索空間の理論でございます。カルナップの樹状体系は変幻自在であること、虚空がすべてを内包し得るように、中空性を持つ形式的な象徴体系は、無数の理論を包摂し得るものであるということを、本論文にて初めて、圏、函手、トポイ、束論の半順序関係、束演算等を用いて示します。カルナップの初期の著作における空間論、時空論が、彼の後の象徴体系の構築を基礎付けているというよりはむしろ、彼の象徴体系構築そのものが、無数の理論を包摂する思索空間の理論、即ち彼特有の空間論に他ならないのだと私は考えます。

京都・顕真学苑論文集
（副題：カルナップと幾何学とに基づく数理哲学）
Kyoto-Kenshingakuen Collected Papers
The Mathematical Philosophy Based on Carnap and Geometry

第五論文
カルナップの言語構築における第三の無限の知恵の樹
（２００８年７月執筆）
the fifth paper
The Third Infinite Tree of Wisdom in Carnap's Construction of Language

京都・顕真学苑副幹（顕真）
the subeditor at Kyoto-Kenshingakuen (Kenshin)

Abstract

This paper reveals for the first time that there are three secret infinite trees of wisdom in Carnap's constructions of language and space. Carnap did not even use an expression "tree of wisdom." It is this paper that represents three types of secret infinite trees of wisdom for the first time. Expressly, the third infinite tree of wisdom, which has a precisely treelike lattice structure, is not in the least written in Carnap's literature, so this paper must clearly construct the third tree for the first time. The newly constructed third infinite dendriform system is the space of speculation that is vacant because of the system's formality and is able to include infinite theories. Carnap's systems are generally regarded as static, but this third branchlike system is flowing, transforming, and contains infinite theories. To construct an infinite treelike system, category theory, functor, and topos theory are applied to Carnap's general syntax. To construct the third infinite tree of wisdom, partial ordering of lattice operations, namely lattice theory, is used and infinite theories are dendritically combined by lattice operations. By increasing or decreasing the theories' axioms, the theories are expanded or reduced, and thereby ascend or descend in the third infinite treelike system of theories, because the combinatorics is infinite. Like empty space, the vacant, formal and symbolic system can include infinite theories. Carnap's construction of a symbolic system is in itself his peculiar theory of space, viz., his space of infinite speculation.

はじめに

『言語の論理的構文論』(1)や『世界の論理的構築』(2)等、カルナップの様々な言語的空間的構築全般には、三種類の隠れた無限の知恵の樹があるという事実を、本論文にて初めて指摘する。カルナップ自身は無限の知恵の樹を明記している訳ではなく、知恵の樹という言葉さえも使用していない。本論文にて初めて、三種の無限の知恵の樹が表現されるのである。特に第三の無限の知恵の樹は、樹木構造を持つというよりは、正確には無限に分岐する樹状の束構造を持つものであるが、それはカルナップの諸文献には全く記されていないため、本論文にて初めて明確に構成する必要がある。新しく構築される第三の無限の樹状体系は、体系の形式性故に中空性を持つ、無数の理論を包摂し得る思索空間の理論である。カルナップの諸文献における諸体系は、死んで動かぬものと一般には思われているが、よく見ると、その樹状の体系は、実は流動し転変し続けている。カルナップの体系は、存在の問題については中立の立場を取っているため、その樹状体系は、存在や非存在を超えた中立の状態で、因となり果となって、ただ転変と分岐を繰り返すのである。カルナップの樹状体系は変幻自在であり、無数の理論を包摂し得るものであることを、以下に初めて示す。第一節において、『言語の論理的構文論』における一般構文論の要旨を、原典に忠実に述べる。第二節において、カルナップの言語的時空的構築全般の関係的構造を述べる。第三節、第四節において、無限の樹状体系を構築するに当たり、圏と函手とトポスを初めて用いて、一般構文論を関係の理論で構成する。第五節において、三種類の無限の知恵の樹を構成する。第三の無限の知恵の樹の構成には、束論の半順序関係を用いる。

一、『言語の論理的構文論』における一般構文論

本節は、『言語の論理的構文論』の要約、その中でも主に第四部「一般構文論」（独語版では１０６頁から２０２頁、英訳版では１５３頁から２７５頁）の要約を、本論文にて三種類の無限の知恵の樹を初めて構成するための、解釈の対象となる基本文献として、原典に忠実に再現し、提示するものである。

言語の論理的構文論とは、言語形式の形式的理論であり、形成規則と変換規則とから成る組織的言明である。純粋構文論は組み合わせ論的(Kombinatorik)であり、特殊な種類の有限な離散的な順列を成す構造の幾何学であり、書かれた模様の幾何学とも呼ばれるように、言語の機能に関して、構造的様式、配列の構造を問題とする。主な目的は、メタ論理のための正確な概念的体系が、そのメタ言語の中で構成されるような具合に、メタ言語をより正確にすること、そして、公理の無矛盾性や演繹体系における定理の証明可能性を表現するため

のメタ言語の形式の一般的理論を構成することであり、「メタ論理」という語の代わりに「論理的構文論」という語を用いる。言語のメタ論理も、ゲーデルの方法によって算術化でき、その言語自身の中で公式化される。証明可能性、導出可能性など、形式的演繹論理の理論の概念は、純粋に構文論的概念であり、それらの定義は論理的構文論において公式化される。一般構文論は、任意の形式の言語に応用可能な構文論的概念の体系であり、理論と概念の形式的な構築が目標である(3)。

一般構文論の研究とは、如何なる特定の言語にも関わらず、すべての諸言語か或る種の諸言語かのどちらかに関わる構文論の研究である(4)。任意の言語に適用できる一般構文論を概観する前に、構文論的諸指示(Bezeichnung)の性質と構文論において生じる或る諸用語の性質とに関わる幾らかの予備的な所見が規定される。

対象の指示は固有名であるかその対象の指示であるかのどちらかであり得る。構文論的指示の場合のように、指示された対象がそれ自身言語的表現である時は、問題は異なる。ここでは、指示と指示された対象との区別に注意を払わなければ、曖昧さと誤りに容易く導かれる。

文が表現に関わるならば、その表現それ自身ではなく、この表現の指示、即ち、その時々に用いられる構文論言語における構文論的指示が、文の主語の位置を占める。構文論言語は語言語であるか、記号言語であるか、語と諸記号との混合から成る言語であるかのどれかである。諸表現の構文論的指示の最も重要な種類が、以下に列挙される。

A.個別の、空間的時間的に決定された事物としての表現の指示。(記述的構文論においてのみ生じる。)1.表現の名。(滅多に生じない。記号化(Kennzeichnung)としても解釈することができる。)2.表現の記号化。3.引用符を伴う同じ表現から作られた表現の指示。

B.表現の形の記号化。1.表現の形の名。(例えば記号の形の名。記号化としても解釈することができる。)2.空間的時間的位置の言明(Angabe)による表現の形の記号化。(間接的記号化。所謂直示(Aufweisung)。)3.構文論的諸規則(Bestimmung)による表現の形の記号化。4.引用符を伴うその形の表現から成るその表現の形の指示。

C.より一般的な形式の指示。(即ち、等しくない諸表現にも適用することができる形式。)1.形式の名。(例えば或る種の記号の名。)2.形式の記号化。3.許可された修正の言明を伴う引用符の中のその形式の表現から成るその形式の記号化。

引用符の中の表現による形式の指示は、許可された修正が全く与えられないか、或いは不正確に与えられるかのどちらかであるならば、曖昧さに導かれる

ということは、度々見過ごされる。

表現とその構文論的指示とを明確に区別することの重要性は、以下のような例から容易に理解できる。

(1)「ωは順序タイプ(Ordnungstypus)である。」(2)「「ω」はアルファベットの文字である。」(3)「オメガはアルファベットの文字である。」(4)「「ω」はアルファベットの文字ではなく、5 個の文字から構成される語である。」(5)「4 番目の文はオメガに関わるのではなく、それ故「ω」に関わるのではなく、「オメガ」に関わる。この文においては、これ故、主語の位置を占めるのは、3 番目の文におけるように「オメガ」ではなく、「「オメガ」」である。」

それ自身の指示として用いられるのは、言語外の対象より、言語的表現である。この様に用いられる表現を、自律的(Autonym)と呼ぶ。この場合、その表現は或る場所ではそれ自身の指示として用いられ、他の場所では他の何かの指示として用いられる。自律的にも生じるすべての諸表現のこの曖昧さを除去するために、如何なる諸表現の下で第一の解釈を、そして如何なる解釈の下で第二の解釈を取るべきか決定するための規則が規定されなければならない。(例。「～」「∨」「＝」は、ドイツ文字記号(Frakturzeichen)を含む表現に生じる場合にのみ自律的であると規定した。反例。次の様な種類の公式化が度々見られる。「a＋3 が素数であるならば、x の代わりに a＋3 を用いる。」ここで、表現「a＋3」は、第二の位置に自律的に用いられ、第一の位置に非自律的に用いられる。即ち、実質的話法では、数の指示として用いられる。これに対しては、規則が与えられていない。正しい書き方は、「a＋3 が素数であるならば、「x」の代わりに「a＋3」を用いる。」

表現の省略が表現の指示と間違えられる時がある。しかし、その差異は本質的である。それが対象言語の表現の問題であるならば、省略もまた対象言語に属するが、指示は構文論言語に属する。省略の意味するものは、もとの表現そのものではなく、もとの表現の意味である。「2」が「1＋1」の省略として導入されるならば、「1＋1」は「2」の意味ではなく、むしろ両方の表現は実質的話法において、同じ意味を持つ。即ち、形式的に表現されるならば、それらは同義的である。表現は文においてその省略と置き換えることができる（そして逆も可能である）が、その指示と置き換えることはできない。表現の省略は、表現の代替物であるが、表現の指示は、その代替物ではない。

指示と指示された対象との混同は、文の連絡（例えば含意）と文の間の構文論的関係（例えば帰結関係）との間の根本的差異が度々見過ごされるという事実の責任をも帰されるべきであるとされる。

予備的所見を終え、一般構文論の概要を述べる。即ち、任意の言語に適用できる包括的な構文論的諸用語の諸定義の体系である。この場合の言語とは、任

意の種類の計算、即ち、任意の種類の諸記号の有限な順序付けられた列に関わる形成規則と変換規則の体系を意味する。言語Ⅱにおいて定義された記号を確定的と呼ぶのは、非制限的な演算子がその諸定義の鎖の中に生じない場合である。そうでなければ、不確定的と呼ぶ。言語の構成において、不確定的な、或いは非可述的な諸記号を、構成する言語に導入するか否かは、言語形式の選択の問題、即ち、構文論的諸規則を確立する問題である。特定の言語の構成において不確定的な構文論的諸用語を用いることに関連して、特に形成規則と変換規則を区別しなければならない。形成規則は、「文」の定義を構成する。それは「初等的文」を定義し、そして文の形成のために幾つかの演算を決定することによって果たされる。表現が文と呼ばれるのは、それが初等的文から文形成演算の有限の適用によって、構成できる時である。「原始的文」は「諸前提の 0 列から直接的に導出可能」として表現され、「導出可能」は確定的用語「直接的に導出可能」の関係の有限の鎖によって決定される。「証明可能」は「諸前提の 0 列から導出可能」と定義される。純粋構文論においては、諸記号の種類と順序のみに依存する、諸表現の構文論的諸性質のみが扱われる。任意の言語において不確定的な用語「帰結」が確立されるならば、その言語内の論理的諸関係に関わるあらゆるものが、それによって決定される。任意の言語 S の変換規則、即ち用語「S における直接的帰結」の定義が与えられる。無限の諸表現と文を、算術化された構文論において扱うことは、全く可能である。表現 A_1 が言語 S における表現のクラス K_1 の直接的帰結と呼ばれるのは、(1)A_1 と K_1 のあらゆる表現が或る諸形式を持つ場合、(2)A_1 と K_1 が或る諸条件を満たす場合であるとする。定義は(1)の下に S の形成規則を、(2)の下に S の変換規則を含む。類同値(gattungsgleich)や類(Gattung)や記号類(Zeichengattung)等が定義される。S のあらゆる A は丁度一つの類に属する。言語Ⅰと言語Ⅱにおいて、すべての定数の数記号(Zahlzeichen)は共に類を形成する。

S の変換規則は、「S における直接的帰結」の定義の先に示された形式に転換されるとする。必要なことは、諸表現の如何なる諸形式に、諸規則が一般に適用できるかを明らかにすること（それによって「文」の定義が与えられる）、そして如何なる諸条件の下で、推論の変換が許されるかを明らかにすること（それによって「直接的帰結」の定義が与えられる）である。S_1 が文クラス K_1 から直接的に導出可能と呼ばれるのは、K_1 と S_1 が導出規則即ち確定的な変換規則である a 規則(a-Bestimmungen)の内の一つを満たす場合である。S_1 が原始的文と呼ばれるのは、S_1 が空クラスから直接的に導出可能である場合である。空の前提クラスを伴う導出は証明と呼ばれる。S_1 が文クラス K_1 から導出できる（或いはその a 帰結である）と呼ばれるのは、S_1 が前提クラス K_1 を伴う導出の最後の文である場合である。S_1 或いは K_1 が証明可能(beweisbar)或いは a 妥当

(a-gültig)と呼ばれるのは、S_1 或いは K_1 のあらゆる文が、空クラスから導出可能であり、従って証明の最後の文である場合である。S_1 或いは K_1 が論駁可能(widerlegbar)或いはa反妥当(a-widergültig)と呼ばれるのは、Sのあらゆる文が $\{S_1\}$ 或いは K_1 から導出できる場合である。S_1 或いは K_1 が解決可能(entscheidbar)或いは a 確定的(a-determiniert)と呼ばれるのは、S_1 或いは K_1 が証明可能であるか論駁可能であるかのどちらかの場合である。

英訳版では、S_1 が K_1 の帰結と呼ばれるのは、或る二つの条件を満たすあらゆる文クラス K_i に S_1 が属する場合である。独語版では、K を文クラスとすると、文クラスの最後の列が前提クラス K_1 を伴う帰結列であるのは、以下の場合である：(1)K_1 は列の第一のクラスである。(2)K_{i+1} が列において直接に K_i の後に続くならば、K_{i+1} のあらゆる文は K_i の部分クラスの直接的帰結である。K_n が K_1 の帰結クラスと呼ばれるのは、K_n が前提クラス K_1 を伴う帰結列の最後のクラスである場合である。S_1 が K_1 の帰結と呼ばれるのは、$\{S_1\}$ が K_1 の帰結クラスである場合である。確定的な変換規則である a 規則に基づく a 概念(a-Begriff)に対して、不確定的な変換規則である帰結規則即ち f 規則に基づく f 概念(f-Begriff)（例えば「帰結」「分析的」「内容」）の持つ、或る重要な長所は、それによって論理的文を分析的と矛盾的に完全に分割することは可能であるが、対して論理的文を証明可能と論駁可能に対応して分類することは不可能であるという事実に存する。ヒルベルトの「新しい有限の推論規則」における「有限の」は、ここでいう「確定的な」と同じ意味である。ただ、その規則は、明らかに不確定的である。K_1 が反妥当と呼ばれるのは、あらゆる文が K_1 の帰結である場合である。K_1 が確定的と呼ばれるのは、K_1 が妥当であるか反妥当であるかのどちらかである場合である。二つ或いはそれ以上の命題的クラスが互いに両立不可能或いはa両立不可能(a-unverträglich)と呼ばれるのは、それらの和が反妥当或いは論駁可能である場合である。

「内容」とは、すべての帰結のクラスを指示し得る。言語Ⅰと言語Ⅱの様な純粋な L 言語における分析的文は、空の内容を持つ。また「内容」としてすべての不確定的な帰結のクラスと見なすことも可能である。分析的文の帰結は分析的文のみであり、矛盾的文の帰結はすべての文である。K_2 が K_1 の帰結クラスであるならば、K_2 の内容は K_1 の内容に含まれる。そして逆も可能である。帰結の移行において、内容の増加は起こらない。帰結関係の同義反復的性格はここに存する。

物理的諸法則も、変換規則として含まれる。あらゆる論理的文は確定的であり、あらゆる不確定的文は記述的である。用語「妥当」と「反妥当」は、言語Ⅰと言語Ⅱにおいて「分析的」と「矛盾的」に符合する。S_2 が S_1 の部分言語(Teilsprache)と呼ばれるのは、(1)S_2 のあらゆる文は S_1 の文であり、(2)K_2 が S_2

におけるK_1の帰結クラスであるならば、K_2は同様にS_1におけるK_1の帰結クラスである場合である。S_2がS_1の帰結を保存する部分言語(folgeerhaltende Teilsprache)と呼ばれるのは、その他に(3)K_2がS_1におけるK_1の帰結クラスであるならば、そして、K_2とK_1がまたS_2に属するならば、K_2はまたS_2におけるK_1の帰結クラスである場合である。

言語Ⅰと言語Ⅱに対して、論理的数学的基礎を持つとして表現される変換規則を立てたが、変換の論理外的規則を持つ言語もまた構成することができる。論理的数学的変換規則をL規則と呼び、残りの規則をP規則と呼ぶ。L規則とP規則との間の差異は、原始的文に関係している時、論理的文と記述的文との差異とは一致しない。原始的文としての論理的文は常にL規則であるが、原始的文としての記述的文はP規則である必然性はない。SがL規則のみを含むならば、即ち、Sにおけるあらゆる帰結がL帰結であるならば、SをL言語と呼ぶ。そうでなければ、P言語と呼ぶ。あらゆる論理的言語はL言語であるが、逆は必ずしも真ではない。L言語とP言語との区別は、論理的言語と記述的言語との区別と混同されてはならない。言語ⅠとⅡは記述的言語であるが、それらはL言語であり、それらにおけるあらゆる帰結関係はL帰結である。

先に定義されたa概念とf概念に対して、L概念（つまりLa概念とLf概念）が対比される。「L妥当」「L反妥当」「L不確定的」は、「分析的」「矛盾的」「総合的」に当たる。S_1を妥当な論理的文とすると、S_1は空クラスの帰結であり、それ故そのL帰結であり、それ故分析的である。S_1を反妥当な論理的文とする。この時、あらゆる文がS_1のL帰結である。それ故、S_1は矛盾的である。L概念は言語のL規則への制限によって生ずる。L言語においてP概念は空である。K_1或いはS_1がP妥当と呼ばれるのは、それが妥当であるが分析的ではない場合である。K_1或いはS_1がP反妥当であるのは、それが反妥当であるが矛盾的ではない場合である。分析的文が空の内容を持つという見解はワイルによって表現された。純粋にその形式的論理的構造のために真であり、それ故実質的内容を持たない判断を、論理的に自明と呼ぶ。

Sにおける段階的体系を、後段に説明する六つの諸条件を満たす、空でない表現クラス順序付けられた列と理解する。この列の諸クラスを段階(Stufe)と呼び、順序数で、段階0、段階1、2、…ω、ω＋1、…と番号付ける。この列の諸クラスに属する諸表現を、「Stu」と指示し、そして段階α（αは順序数を表す）に属する諸表現を「$^{\alpha}$Stu」で指示する。m＋1個の諸表現$A_1, A_2, \cdots, A_{m+1}$の順序付けられた列が、特定の表現形式に対するm項の表現枠組み(Ag^m)と呼ばれるのは、文において部分的表現として生じ得るこの形式の少なくとも一つの表現A_nが存在し、枠組み、例えばAg_1の諸表現$A_1, \cdots A_{m+1}$と並びにm個の主要な表現A_1', A_2', …A_m'とから、交互の列の連続で構成される場合である。この様に、A_nは形式

A_1A_1’A_2A_2’…A_mA_m’A_{m+1}を持つ。諸表現A_1’,…A_m’はA_nにおけるAg_1の第1の、…第mの項と呼ばれる。それらが正しい番号順に形成する列は、A_nにおけるAg_1のm項の項列(Arg^m)と呼ばれる。A_nはまた「Ag_1(A_1’,…A_m’)」によって指示される。或いは、Arg_1がそれらの項の列であるならば、「Ag_1(Arg_1)」によって指示される。A_nはAg_1の十分な表現(Vollausdruck)と呼ばれる。$Ag_1{}^m$と$Ag_2{}^m$が同じ値の経過(Wertverlauf)を持つというのは、同じArgを含むAg_1とAg_2のあらゆる二つの十分な表現が同義的である場合である。

形式Sに対するAg^mはm項の文枠組み(Sg^m)と呼ばれる。$Ag_1{}^m$を、場合によっては付随記号を伴う（或いは伴わない）${}^{\alpha}Stu_1$から構成されるとする。A_nを十分な表現$Ag_1(Arg_1)$とする。ここで、A_nそれ自身のみならず、あらゆる項を、Sであるか$\beta<\alpha$である${}^{\beta}Stu$であるかのどちらかであるとする。その時、A_nはまた、Stu_1の十分な表現と呼ばれる。Arg_1はまた、A_nにおけるStu_1の項列と呼ばれる。Stu_1はA_nにおいてm項(Stu^m)と呼ばれる。A_nをまた$Stu_1(Arg_1)$によっても指示する。この場合、Ag_1はSgであり、そしてそれ故A_nがSであるならば、Stu_1は述語表現(Pr, Pr^m, ${}^{\alpha}Pr$)と呼ばれる。記号Prは述語(pr, pr^m, ${}^{\alpha}pr$)と呼ばれる。他方では、A_nがStuであるならば、Stu_1は函手表現(Fu, Fu^m, ${}^{\alpha}Fu$)と呼ばれる。記号Fuは函手(fu, fu^m, ${}^{\alpha}fu$)と呼ばれる。

Sにおける段階的体系の六つの諸条件とは、以下の通りである：(1)StuはSではない。(2)A_1が${}^{\alpha}Stu$と類同値であるならば、A_1も${}^{\alpha}Stu$である。(3)$\alpha>0$であるあらゆる${}^{\alpha}Stu$は述語表現Prであるか函手表現Fuであるかのどちらかである。(4)あらゆる${}^{0}Stu_1$に対して、そのStu_1が項である十分な文を伴う段階数1の述語表現Prが存在する。(5)Stu_1を、αが1より大きい${}^{\alpha}Stu$であるとし、それ故Prであるか Fuであるかのどちらかであるとする。(a)αより小さい最大の順序数があるとして、例えばβとする(それ故$\alpha=\beta+1$である)。この時、Pr或いは$FuStu_1$に対して、項の内の一つ或いはA_1それ自身が${}^{\beta}Stu$であるような十分な表現A_1が存在する。(b)αより小さい最大の順序数はない(例えば$\alpha=\omega$に対して)。その時、αより小さいあらゆるβに対して、$\beta<\gamma<\alpha$であるようなγが存在し、項の内の一つ或いはA_1それ自身が${}^{\gamma}Stu$であるようなStu_1に対する十分な表現A_1が存在する。(6)R_1は能う限り大きい、即ち、R_1に関連するクラスStuは、同様に条件(1)から(5)を満たす列R_2に関連するクラスStuの真部分クラスではない。A_1が、Sg_1、Pr_1、或いはFu_1に対する（後には文関数Sfu_1或いは表現関数Afu_1に対する）適切な項（全般、或いはi番目の項位置に対して）と呼ばれるのは、A_1が何らかの項位置、或いはi番目の位置に生じる十分な表現或いは十分な文がある場合である。

一般構文論においてここで定義される用語PrとFuは、言語Ⅱにおいて以前適用された用語より広い。この新しい用語によれば、連結記号は第一段階の二

項述語 $^1pr^2$ であり、「～」（否定記号）は第一段階の一項述語 $^1pr^1$ である。あらゆる自然数 n(＞0)に対して十分な文 $pr_1(^npr, ^npr)$（例えば P＝Q）が存在するため、それは $^{\omega}pr$ である。異なるタイプに対して記号「⊂」が、その都度対応するタイプ指数を備え付けられず、Pr のすべてのタイプに対して区別なく使用されることを明示するならば、「⊂」もまた $^{\omega}pr^2$ であり、段階ωに属する。同様の条件の下、F∨G における「∨」も $^{\omega}fu^2$ であろう。ヒルベルトとゲーデルは超限の段階を導入する可能性を指摘した最初の人物とされている。

代入が S において生じるというのは、以下の条件を満たす S における諸表現（変数表現 V と呼ぶ）がある場合である。あらゆる V、例えば V_1 に対して、演算子(Op)、或いはより正確に V_1 を伴う演算子(Op_{V1})と呼ばれる諸表現のクラス（空でもあり得る）が互いに関連付けられている。Op_1 を Op_{v1} とする。その時、Op_1 に対して、Op_1 と関連する V_1 の代入値と呼ぶ主要な諸表現のクラスが互いに関係付けられる。このクラスは V_1 と同義的ではない少なくとも一つの表現を含む。更に、V_1 それ自身に対して、自由な V_1 に対する代入値と呼ばれる主要な表現のクラスが互いに関連付けられる。このクラスは空ではない時、互いに同義的ではない少なくとも二つの表現を含む。Op_{1V1} が制限されていないと呼ばれるのは、V_1 のあらゆる値が Op_1 と関連する V_1 の代入値でもある場合である。A_1 を $Ag_1{}^m$ の十分な表現とし、S か Stu かのどちらかであるとする。そして A_2 を、A_1 からあらゆる項 A_i（i＝1 から m）を、その値に A_i が属する B_i に置き換えることによって構成されるとし、A_2 は文において部分的表現として生じ得ると見なされる。A_2 はその時 m 項の表現関数(Afu, Afu^m)と呼ばれる。B_i は A_2 の i 番目の項と呼ばれる。A_1 がここで S であるならば、A_2 は m 項の文関数(Sfu, Sfu^m)と呼ばれる。Sfu は Afu の重要な種類を構成する。

文枠組み Sg の例は、「P(3,—)∨Q(—)」「Q(—)」であり、文関数 Sfu の例は、「P(3,x)∨Q(x)」「Q(x)」であり、述語表現 Pr の例は、「Q」である。表現関数 Afu と文関数 Sfu に加えて、表現枠組み Ag と文枠組み Sg もまた扱われなければならない理由は、あらゆる言語において、関連する項に対する変数表現があると、一般的に仮定することはできないということである。Sfu^0 は S である。言語Ⅰや言語Ⅱ等、通常の記号的諸言語の大多数において、すべての Sfu は S である。

Op_1 を、S_1 における或る場所に生じるとする。その時、この Op_1 に対して、確定的な形成規則によって（それは変換規則に含まれる）Op_1、Sfu_1、そして時に補助記号から成る S_1 の部分的表現 Afu に互いに関係付けられる。Sfu_1 は S_1 における Op_1 の被演算子(Operand)と呼ばれる。通常、Sfu_1 はここで Op_1 の後に来る。そして時に被演算子 Sfu_1 の始め或いは終わり或いはその両方は、Op_1 によってのみならず、特定の補助記号によって指示される（例えば言語ⅠとⅡにおいては

括弧によって)。Afu_1は「$Op_1(Sfu_1)$」によってもまた指示される。Sfu_1がOp_1に属する被演算子であり得るならば、即ち、形式$Op_1(Sfu_1)$のAfuが存在するならば、Sfu_1を、Op_1に関連して演算可能と呼ぶ。V_1がA_2において特定の位置で束縛されていると呼ばれるのは、この特定の位置が、形式$Op_{1V1}(Sfu)$を持つA_2の部分的表現に属する場合である。そして特に、それが制限的に、或いは非制限的に、束縛されていると呼ばれるのは、Op_1が制限されている、或いは制限されていない場合である。「$Afu_1(^{V1}{}_{A1})$」によって、Afu_1におけるすべての代入位置でV_1を値A_1に置き換えることによってAfu_1から結果する表現を指示する。V_1がAfu_1において自由に生じないならば、「$Afu_1(^{V1}{}_{A1})$」は「Afu_1」それ自身を指示する。$Afu_1(^{V1}{}_{A1})$をV_1におけるAfu_1の変形(Variante)と呼ぶ。形式$Sfu_1(^{V1}{}_{A1})$の文が、Op_{1V1}に関連するSfu_1の変形と呼ばれるのは、Sfu_1がOp_1に関連して演算可能であり、そしてA_1がOp_1に関連するV_1の代入値である場合である。$Op_1(Sfu_1)$がSfu、例えばSfu_2であるならば、Op_1はSfu_2における文演算子と呼ばれる。$Op_1(Sfu_1)$がSfuではないとして、そしてそれ故他のAfu、例えばAfu_2であるとする。その時、Afu_2は記号化関数(Kennzeichnungsfunktion)と呼ばれる。もしそれが閉じていれば、記号化(Kennzeichnung)と呼ばれる。Op_1はその時Afu_2における記号化演算子と呼ばれる。S_1を$Op_{1V1}(Sfu_1)$とする。Op_1は従ってS_1における文演算子である。ここで、V_1がSfu_1において自由に生じるならば、そしてOp_1に関連するSfu_1のあらゆる変形がS_1の帰結であるならば、Op_1はS_1における普遍演算子と呼ばれる。

V_1がS_1において自由に生じるとする。その時、あらゆる変形$S_1(^{V1}{}_{A2})$(そしてその場合A_2は自由なV_1の任意の代入値である)がS_1の帰結であるならば、S_1において自由なV_1に対する代入が存在するという。A_1がV_1の代入値と呼ばれるのは、以下の諸条件の内の少なくとも一つが満たされる場合である:(1)Sにおいて、自由なV_1に対する代入が存在し、A_1は自由なV_1に対する代入値である。(2)Sにおいて普遍演算子Op_{1V1}が存在し、A_1はOp_1に関連する代入値である。

V_1がS_1において自由に生じるならば、しかし同時にS_1において自由なV_1に対する代入が存在しないならば、V_1はS_1において定数であるという。a_1が変数表現Vであり、如何なる文においても定数ではないならば、a_1は変数(v)と呼ばれる。a_1がvではないならば、a_1は定数(k)と呼ばれる。k_1が$^{\alpha}Stu$ならば、k_1は段階αの定数($^{\alpha}k$)と呼ばれる。S_1が開いていると呼ばれるのは、S_1において自由に生じるようなV_1が存在し、S_1において自由なV_1に対する代入が存在する場合である。変数表現のない言語体系は容易く構成できる。明らかにその様な体系は閉じた体系でもある。

S_1が閉じており、Sfu,そしてそれ故Sを真部分として含まないならば、S_1は初等的文と呼ばれる。初等的文においては、変数v も、演算子Op も、文連結Vk も生じない。変数v_1が文記号ならば、v_1は文変数(s)と呼ばれる。S_1において、

或いは一般に、v_1のすべての代入値が述語表現 Pr であるならば、v_1はS_1において、或いは一般に、述語変数(p)と呼ばれる。すべての代入値が Pr^m であるならば、v_1を p^mと呼ぶ。同じことが函手表現、函手変数(f, f^m)に対応する。S_1において、或いは一般に、V_1のすべての代入値を$^\alpha$Stu とする。その時、V_1はS_1において、或いは一般に、$^\alpha$V（対応して$^\alpha$v、$^\alpha$p、$^\alpha$f）と呼ばれる。^{0}v は個別変数、^{0}k は個別定数と呼ばれる。S_1において、或いは一般に、V_1のすべての代入値を Stu とし、しかし様々な段階の Stu であるとする。その時V_1が、S_1において、或いは一般に、$^{(\alpha)}$V と呼ばれるのは、あらゆる$\beta<\alpha$に対して、S_1において、或いは一般に、代入値の内の少なくとも一つが段階γに属するが、段階α或いはそれより高い段階には属さないような、$\beta\leqq\gamma<\alpha$であるγが存在する場合である。$^\alpha V_1$は必ずしも Stu ではない。$^\alpha V_1$がS_1において、或いは一般に、Stu、詳しく言うと、$^\alpha$Stu であるのは、V_1が、S_1において、或いは少なくとも一つの S において、自由の生じる場合、そしてその場合に限る。

領域が m 個の対象を含むとし、或る性質が、文S_1、S_2、…S_mによって、これらの諸対象の各々に帰されるとする。S_nが文 S_1から S_mを合わせたものを少なくとも意味するならば、S_nを広義の符号する普遍文と呼ぶ。普遍演算子はフレーゲ、ラッセル、ヒルベルト、ベーマン、ゲーデル、そしてタルスキの諸言語に生じる。存在演算子もこれらの諸言語の各々に生じる。S_1における或る位置の V_1が無限の普遍性を持つというのは、V_1がその位置で無限の変動性を持ち、そこで普遍演算子によって自由であるか束縛されているかのどちらかである場合である。例えば、x は(∃x)5(P(x))において変動数 6 を持つ。P(x)と(x)(P(x))において、それは無限の変動性と無限の普遍性の両方を持つ。自由な文変数 s のみを伴い、定数の文記号 sa を伴わない、通常の形式の文計算において、あらゆる文は分析的であるか矛盾的であるかのどちらかである。このように、あらゆる文変数 s は変動数 2 を持つ。普遍演算子と存在演算子を導入する時でさえも、同様のことが真である。文変数 s はその時非制限的に束縛されているが、有限の変動性のみを持つ。

K_1が S_1の前提クラスであるということは、実質的解釈において、K_1がそれにおいて S_1が真である可能な場合の内の一つであるということである。余地(Spielraum)によって、M_1に属する前提クラスと内容の等しい(gehaltgleich)各々のクラスがM_1にも属するような、前提クラスのクラスM_1であると理解する。K_1の余地を、K_1の前提クラスのクラスであると理解する。M_1が S_1の余地であるということは、実質的解釈において、M_1がそれにおいて S_1が真であるすべての可能な場合のクラスであることを意味する。換言すれば、それは S_1によって開かれている可能性の領域である。全体的余地(Gesamtspielraum)によって、すべての前提クラスのクラスであると理解する。K_1 の補足的余地

(Ergänzungsspielraum)を、K_1の前提クラスではない前提クラスのクラスであると理解する。K_1の補足的余地がK_2の余地であるならば、K_2をK_1に対する反クラス(Kontraklasse)と呼ぶ。対応して、S_2がS_1に対する反文(Kontrasatz)と呼ばれるのは、$\{S_2\}$が$\{S_1\}$に対する反クラスである場合である。

すべてのn個の項がSであるSg_1^nの十分な文があるならば、Sg_1^nはS_1におけるn項の文連結と呼ばれる。n個の恣意的な文を項として伴うSg_1^nが、十分な文を構成するならば、Sg_1^nはn項の文連結と呼ばれる(Vk, Vk^n)。Sg_1^nがPr_1^nと場合によっては付随記号とから構成されるならば、Pr_1^nはn項の文述語表現と呼ばれる。文述語、或いは連結記号と呼ばれるvk^nは、それに対して文が項として適当である段階数1、項数nの述語である。

Op_{1V1}を普遍演算子、Op_{2V1}を存在演算子とする。V_1の代入値を、Op_1に関連するものにおいてと同様にOp_2に関連するものにおいて同じであるとする。そして文連結Vk_1を否定とする。Op_1とOp_2とVk_1とが一体を成している(zusammengehörig)と呼ばれるのは、Op_1とOp_2に関して演繹可能であるあらゆる文関数Sfu_1に対して、$Vk_1(Op_1(Sfu_1))$が$Op_2(Vk_1(Sfu_1))$と内容が等しい場合である。

A_0を$^{\alpha}Stu$とし、Fu_1を段階数$\alpha+1$、項数1の函手表現、R_1を、以下の方法で構成される諸表現の無限列とする：最初の項はA_0であり、あらゆるnに対して(n＋1)番目の項は、n番目の項を項として持つFu_1の十分な表現である。R_1のあらゆる二つの異なる表現が類同値(これ故各々は$^{\alpha}Stu$)であるが同義的ではないならば、R_1を数表現列或いはZ列と呼ぶ。R_1の諸表現と、それらと同義的な諸表現を、R_1の数表現(Z)と名付ける。A_0と同義的な数表現Zを、R_1の空表現或いは0-Zと名付ける。$Fu_1(A_0)$と同義的な数表現をR_1の1-Zと名付ける。$Fu_1(Z_1)$と同義的な数表現Zを、Z_1の後続表現と名付ける。V_1を数Vと呼ぶのは、数表現ZがV_1の代入値に属する場合である。v_1が数Vであるならば、v_1を数変数(z)と呼ぶ。

Sg_1^n（或いはPr_1^n）に対して、数表現Zのみを項として持つ十分な文が存在するならば、Sg_1（或いはPr_1）を数Sg(或いは数Pr)と呼ぶ。Fu_1^nに対して、この表現それ自身とすべての項が数表現Zであるような十分な表現が存在するならば、Fu_1を数Fuと呼ぶ。pr_1（或いはfu_1）が数Pr(或いは数Fu)であるならば、pr_1（或いはfu_1）を数述語(zpr)或いは数函手(zfu)と呼ぶ。

Sの中に算術があるならば、実数の指示と解釈できる諸表現、即ち項数1の数Sg^1がある。そして更に、それはその十分な諸表現がZである、項数1の数Pr^1と項数1の数Fu^1を含み得る。V_1を実数に対するVと呼ぶのは、V_1の代入値に属する無数の項数1の数Pr^1（或いは言及された種類の項数1の数Fu^1）が存在する場合である。V_1が実数に対するVであり、S_1におけるV_1が無数の普遍性を持つならば、S_1を実数に関する普遍文と呼ぶ。例えば、言語Iはその中に自由変

数を持つ文がある故に、一般的な算術を含む。実数は言語Ⅰにおいて、項数 1 の述語と項数 1 の函手によって、表現することができる。しかし、実数に対する変数表現はなく、実数の項に対する述語表現もない。言語Ⅱにおいては、段階数 2 の述語が、実数の述語として用いられる。無限の普遍性を持つ段階数 1 の述語変数、段階数 2 の述語変数、段階数 2 の函手変数が存在するため、結果として、実数に関する普遍文や実数の関数に関する普遍文などが存在する。

無矛盾な(widerspruchsfrei)言語が、整合性のない(inkonsistent)ことがあり得る。その言語は、個々の文の間には矛盾を含まないが、文クラス間には矛盾を含む。これ故、より狭い概念「整合性」(konsistent)が導入される。「整合性」はゲーデルの「ω無矛盾」に対応する。一般的な算術を含むあらゆる整合的な言語は解決不可能である。

概念「真」と「偽」の通常の用法は、矛盾に至る。S において公式化される S の構文論が 3 つの構文論的形容詞‘N’、‘T’、‘F’を含むとし、それらに関して以下の V1 から V3 の仮説を立てる（これらの仮説は英訳版に存在する）。文「A_1 は性質 N を持つ」を‘N(A_1)’と省略形式で書く。‘N(A_1)’は「A_1 は文ではない」、‘T(A_1)’は「表現 A_1 は真なる文である」、‘F(A_1)’は「A_1 は偽なる文である」と解釈される。仮説 V1. S のあらゆる表現は、三つの諸性質 N、T、F の内の丁度一つを持つ。仮説 V2a. ‘A’を、S の任意の表現とする。T(‘A’)ならば、A である。仮説 V2b. A ならば、T(‘A’)である。仮説 V3. 任意の A_1 に対して、表現‘N(A_1)’、‘T(A_1)’、‘F(A_1)’は性質 N を持たない。それ故、それらは V1. に従って、T か F かのどちらかを持つ。V1. と V2b. から、以下のようになる。F(‘A’)ならば、T(‘A’)ではなく、それ故 A ではない[4]。A でなければ、T(‘A’)ではなく、そしてそれ故 F(‘A’)か N(‘A’)である[5]。(a)A_1 は表現‘T(A_2)’であり、(b)A_2 は‘F(A_1)’である[6]。V3. に従って、T(‘F(A_1)’)か F(‘F(A_1)’)であるかのどちらかである[7]。T(‘F(A_1)’)とする。これから、V2a. に従って、F(A_1)となる。[6a]により、これは F(‘T(A_2)’)である。これから、[4]より、T(A_2)ではない。[6b]により、T(‘F(A_1)’)ではない。この仮説は矛盾に至るため、退けられる。

これ故、[7]により、F(‘F(A_1)’)である[8]。これから、[4]により、F(A_1)ではない[9]。[6a]により、F(‘T(A_2)’)ではない[10]。V3. により、T(‘T(A_2)’)或いは F(‘T(A_2)’)である[11]。[10]と[11]により、T(‘T(A_2)’)である[12]。これより、V2a. に従って、T(A_2)[13]。[8]と[6b]により、F(A_2)である[14]。これ故、V1. に従って、T(A_2)ではない[15]。[13]と[15]は矛盾を構成する。

他方では、S_1 自身においてではなく、別の言語 S_2 において公式化される S_1 の構文論において、述語「(S_1 において) 真」と「(S_1 において) 偽」を用いることによって、矛盾を招くことなく進むことが可能である。真と偽は本来の構文論的性質ではない。問題の文の真が問題の言語の変換規則から生じるならば、「真」

は「妥当」（或いはより特殊に、「分析的」「証明可能」）と翻訳でき、「偽」は「反妥当」（或いは「矛盾的」「論駁可能」）と翻訳できる。

「真」と「偽」が構文論的用語に置き換えられるならば、構文論的二律背反として知られる種類の矛盾は、S における S の構文論の公式化において生じるかという問題という問題に戻る。S を、算術、それ故 S 自身の算術化された構文論を含む、無矛盾の整合的な言語とする。S において公式化可能な任意のあらゆる構文論的性質に対して、この性質をそれ自身に帰すような、S の文 S_1 を構成することが可能である或る方法が存在する。これは言語Ⅱの場合において既に示された。第一に、それ自身の偽を主張する文からなる二律背反における「偽」を「証明不可能」に置き換える。それ自身について、それが S において証明不可能であることを主張する S の文 S_1 を構成するならば、既に議論された言語Ⅱの文 G（そして言語Ⅰの文 G_{I}）との類似を S_1 において持つ。ここで矛盾は生じない。S_1 が真（分析的）ならば、S_1 は偽（矛盾的）ではなく、S において証明不可能であるに過ぎない。また、この二律背反において、「偽」を「論駁可能」に置き換える。S_2 それ自身が S において論駁可能であることを主張する文 S_2 が S において構成されるとする。S_2 が論駁可能であるとする。その時、S_2 は真であり、分析的である。しかし他方では、あらゆる論駁可能な文は矛盾的であり、分析的ではない。これ故、仮説は偽であり、S_2 は論駁不可能である。これから矛盾は生じない。S_2 はこの反対を意味するので、S_2 は偽であり、それ故矛盾的である。しかし性質「論駁不可能」と「矛盾的」は互いに整合的である。用語「証明不可能」或いは「論駁可能」によってこの二律背反を再構成することの不可能性は、すべての分析的文が証明可能であるとは限らないという事実、そして同様にすべての矛盾的文が論駁可能であるとは限らないという事実による。「S において分析的」と「S において矛盾的」が、S においてそれ自身が公式化される構文論において定義されると仮定するならば、矛盾が構成できることを示すのは容易い。つまり、「S において分析的」が S において定義可能ならば、S は矛盾を含む。言語 S_1 の構文論が用語「分析的」を含むならば、用語「S_1 において分析的」は、S_1 より表現様式においてより豊かな言語 S_2 において公式化されなければならないが、「S_1 において証明可能」は、S_1 において定義可能である。「Ⅰにおいて証明可能」は、不確定的なので、Ⅰにおいて証明可能ではない。しかし、「Ⅱにおいて証明可能」は、‘$(\exists r)[\mathrm{BewSatz}_{\mathrm{II}}(r, x)]$’によって、Ⅱにおいて定義可能である。

あらゆる言語 S に対して、S において定義不可能な実数が与えられる。この定理は、実数の集合が非可算集合であることを述べる集合論のよく知られた定理に対応する。あらゆる算術的体系に対して、定義不可能な算術的用語と解決不可能な算術的文を述べることができる。その中において、すべての算術的用語

が定義可能である言語も、すべての算術的文が解決可能である言語も、存在しない。これはブラウアーとハイティングによってなされた主張における真理の核である。数学は完全には形式化できない。換言すると、数学的なすべては形式化することができるが、数学を一つの体系で汲みつくすことはできない。それは、常により豊かな言語の無限列を必要とする。

Q_1を、構文論的対象間の構文論的相関関係と呼ぶのは、Q_1が、それによって、第二の種類の丁度一つの対象が第一の種類のあらゆる対象に互いに関係付けられ、第二の種類のあらゆる対象が第一の種類の少なくとも一つの対象に互いに関係付けられる、多一関係である場合である。Q_1によって A_1(或いは K_1)に互いに関係付けられる A(或いは K)を、A_1の Q_1相関語と呼び、「$Q_1[A_1]$」或いは「$Q_1[K_1]$」によって指示する。形式化された構文論においては、Q_1は項数 2 の文枠組みであるか、項数 2 の述語表現であるか、項数 1 の表現枠組みであるか、項数 1 の函手表現であるかのどれかであり得る。S_1のすべての文クラスと S_2のすべての文クラスとの間の構文論的相関関係 Q_1を、諸クラスに関する S_2への S_1の写像(Abbildung)と呼ぶのは、Q_1によって、S_1における帰結関係が、S_2における帰結関係に変換される場合である。

Ｉ’を、諸変数を除去することによって構成されるＩの部分言語とする。その時、Ｉ’は諸記号の等値性によって、Ｉに同義的に翻訳可能である。更に、Ｉ’はＩの真部分言語であるけれども、Ｉは諸クラスに関してＩ’に翻訳可能である。例えば、S_1を丁度一つの自由変数 z_1を持つＩの開放文とするならば、形式 $S_1\left({}^{z1}{}_{St}\right)$の文のクラスは、$\{S_1\}$の相関語と見なすことができる。言語の解釈は翻訳であり、そしてそれ故形式的に表現できるものである。解釈の構成と検査は形式的構文論に属する。あらゆる翻訳の構成は、形式的構文論の領域に生じる。

形式的方法は、帰結関係や内容や内容の関係等の概念をも表現できる。言語の解釈に関する諸問題でさえも、形式的構文論の領域内で扱うことができ、論理学のすべての諸問題は、構文論に属する。あらゆる擬似構文論的文も、相関する構文論的文に翻訳できる。任意の言語（内包的な言語でさえも）の構文論は、外延的言語に公式化することができる。というのも、算術と算術化された構文論は、外延的言語に公式化できるからである。様相論理の諸体系のすべての内包的文は擬似構文論的文である。様相論理のあらゆる内包的体系は、外延的な構文論言語に翻訳することができる。構文論においては、用語「内容」によって、文の意味の形式的側面を表現する。そして、用語「帰結」「両立可能」等によって、文の間の論理的関係の形式的側面を表現する。

関係の理論において、諸関係の諸性質、特に構造的諸性質、即ち同形の変換において保持される諸性質が調べられる。この種の理論は、多項述語の構文論

に過ぎない。クラスと性質の双方は、項数 1 の述語 pr^1 で指示される。n＞1 に対する n 項述語と、従来外延記号としてそれに互いに関連付けられていた関係記号は、最早区別されない。関係の理論の用語は、述語の一般構文論に組み入れられ、関係の理論の構文論的用語が導入される。公理論は、諸公理体系の構文論に過ぎず、一般構文論の結果や定義を公理論に用いることも可能である。以上が『言語の論理的構文論』における一般構文論の、原典に忠実な提示である。

二、カルナップの言語的時空的構築全般における関係的構造

カルナップの言語的空間的構築においては、関係的構造の概念が重要な役割を果たす。拙論「カルナップの空間構築における七種の円環」にて詳述したように、『空間』(5)における形式的空間は順序関係の構造とされ、「空間特性の時間特性への依存について」(6)における時空の位相は K、Z、W という関係を要素とする。『物理的概念形成』(7)においては、段階 n の特性の間の条件関係があり、世界点の物理的記述は、14 の列の数の相互依存関係として表現される。同様に、『世界の論理的構築』の構成的体系も、段階的に階層付けられた順序の関係によって構成される。

「『構築』の存在論について」(8)によれば、構成的な体系は、基本的な諸概念からのすべての概念の導出を行う。それは、一般的な諸対象を指示する諸記号の論理的な関数の問題に関わり、順序関係と諸対象の諸クラス間の依存関係を合理的に確立するものである。合理的再構築によって、古い諸概念に対する新しい確定を探究することと理解する。新しい確定は、概念的体系的な構造の中に位置付けられなければならない。その様な概念的解明は、特に思考の基本的カテゴリーを検討する際に、哲学の最も重要な仕事であるとカルナップは考える。カルナップは、伝統的なカテゴリーを、段階形式(degrés de forme)と同一視することを提示する。二つの基本的カテゴリー(catégories fondamentales)は、クラス一般と関係一般であり、関係のカテゴリーが優位を認められる。『世界の論理的構築』において概略を示された体系は、特有の基本的関係 Er(Ähnlichkeitserinnerung)（類似性回想）の上に Ae(Teilähnlichkeit)（部分類似性)、Gl(Teilgleichheit)（部分同値性）等を基礎付ける。Ae は Er から導出できるが、逆は不可である。方向の違いは、時間順序の構成に重要である。それ故、基本的関係として、Ae ではなく Er を選択する。『世界の論理的構築』において認められるのは、先ず諸関係、そして関係的諸性質、そして完全に描写された一つ或いは幾つかの諸関係から構成することのできる、測定における非関係的な諸性質、そして、用いられる諸関係によって完全に描写できる、測

定における特殊である。個物は、様々な段階形式に従って徐々に構成することができる。特殊は、複数の諸関係によって得られる。完全な記述によって与えられた空間関係の集合は、等質の集合である。諸関係は、同種の諸対象間にあるか否かに従って、より等質であったり、より等質でなかったりする。以上が、「『構築』の存在論について」における諸関係についての論旨である。この様に、カルナップの言語的時空的構築は、全般的に関係の理論で表現されている。

三、一般構文論の関係理論化 1　諸定義

『言語の論理的構文論』における第三の無限の知恵の樹、つまり無限の樹状体系を示すに当たり、一般構文論を、前節に概略を示した諸文献と同様に、関係の理論として、英訳版の第 71 節に簡略に示されている関係理論以上に、新たに構成する必要がある。カルナップが世界構築のために構成した形式的言語体系の特質の一つが、函手概念の導入にあることを、拙論「カルナップの時空論における函手概念――層理論による三段の解釈」において詳述した。関係理論は多項述語の構文論に過ぎないとカルナップは言うが(9)、函手は述語より更に機能的に関係を表す概念であり、この函手の概念は、1942 年のアイレンバークとマックレーンの論文(10)によって、圏論における函手の概念に発展する。初めて専ら函手という関係語を用いて、構文論の世界を構築することは、言語的時空的構築に関係の論理を重用したカルナップの意図に適合するものと考えられ、無限の知恵の樹としての樹状体系を示すためにも、不可欠の構成なのである。

『言語の論理的構文論』を、函手概念の発展形態である圏論における函手によって、初めて構成するに当たり、最初に圏論の諸定義を説明すべきである。ゴールドブラット『トポイ：論理学の圏論的分析』(11)によれば、圏とは数学的論説の域であり、その域は或る対象と諸対象との間の関数を明示することによって決定される。圏論においては、関数の代わりに矢が用いられる。圏を公理的に定義する。圏 C は以下の[1]から[5]より成る(12)。[1]C 対象と呼ばれる事物の集まり。[2]C 矢と呼ばれる事物の集まり。[3]各々の C 矢 f に C 対象 dom f と C 対象 cod f を割り当てる作用。[4]dom g=cod f である C 矢各々の対〈g, f〉に、dom (g∘f)=dom f と cod (g∘f)=cod g を持つ、即ち $g\circ f$:dom f→cod g であり、結合法則が満たされるような、f と g との合成である C 矢 g∘f を割り当てる作用。[5]各々の C 対象 b に、b 上の同一矢と呼ばれる C 矢 1_b:b→b を割り当てること。

初等的トポスとは、以下の[1]から[4]のような圏 C のことである(13)。

[1]C は有限的に完備である。圏 C が完備であるとは、C におけるあらゆる図式が、C において極限を持つことである。極限について補足する。先ず、図式 D

に対する錐(cone)は、C 対象 c と共に、D における各々の対象 d_i に対する C 矢 f_i:c→d_i から成る。D に対する錐を表示するために記号{f_i:c→d_i}を用いる。図式 D に対する極限とは、任意の他の D 錐{f_i':c'→d_i}に対して丁度一つの矢 f : c'→c が D におけるあらゆる対象 d_i に対して存在するという性質を持つ、D 錐{f_i:c→d_i}のことである。

[2]C は有限的に余(co)完備である。C が余完備であるのは、あらゆる C 図式が余極限を持つ時である。余極限について補足する。先ず、図式 D に対する余錐は、対象 c と D における各々の対象 d_i に対する矢 f_i:d_i→c とから成る。D に対する余極限とは、任意の他の余錐{f_i':d_i→c'}に対して、丁度一つの矢 f : c→c' が、D におけるあらゆる d_i に対して存在するという、余普遍的な性質を持つ余錐{f_i:d_i→c}のことである。

[3]C は幂乗(exponentiation)を持つ(14)。圏 C が幂乗を持つというのは、それが任意の二つの C 対象に対する積を持ち、そして、任意の C 対象 a と b と c と、C 矢 g:c×a→b に対して、ev∘($\hat{g}$×1_a)=g となるような唯一の C 矢 $\hat{g}$:c→b^a が存在するような、C 対象 b^a と、評価の矢と呼ばれる C 矢 ev:b^a×a→b とが存在する場合である。

[4]C は部分対象分類子(subobject classifier)を持つ。部分対象分類子について補足する。先ず、対象 1 が圏 C において終対象であるのは、あらゆる C 対象 a に対して、C において a から 1 への唯一の矢がある場合である。そして、圏 C における矢 f:a→b がモニック(monic)であるのは、C 矢の任意の並列する対 g:c→a、h:c→a に対して、等値性 f∘g=f∘h が g=h を含意する場合である。そして、共通の値域を持つ C 矢の対 a→c←b の引き戻し(pullback)は、図式 a→c←b に対する C における極限である。そして、C が終対象 1 を持つ圏であるならば、C に対する部分対象分類子は、以下の公理を満たす C 矢「真」: 1→Ωを伴う C 対象Ωである。Ω公理:各々のモニック f:a→d に対して、!:a→1、「真」:1→Ω、f:a→d、χ_f:d→Ωが引き戻しであるような唯一の矢χ_f:d→Ωがある。以上が、初等的トポスの定義である。

函手の概念は、圏論の本質である(15)。函手は、圏の構造を保持する、一つの圏から他の圏への変換である。圏 C から圏 D への函手 F は、以下を割り当てる関数である(16)。[1]各々の C 対象 a に、D 対象 F(a)を割り当てる。[2]各々の C 矢 f:a→b に D 矢 F(f):F(a)→F(b)を以下のようにして割り当てる。(a)F(1_a)=1F(a)、すべての C 対象 a、即ち a 上の同一矢が、F(a)上の同一性に割り当てられる。(b)g∘f が定義される時は常に、F(g∘f)=F(g)∘F(f)、すなわち函手とは、定義域、値域、同一性、合成を保持する変換である。

反変函手 F:C→D は、f:a→b に、矢 F(f):F(b)→F(a)を割り当てるもので、F(1_a)=$1_{F(a)}$か、F(g∘f)=F(f)∘F(g)の場合である。圏を、その間の矢を伴う諸対象

の集まりと定義し、函手を導入すると、圏を対象と見なし、函手をその間の矢と見なすことによって、圏の圏が考えられる。更に、函手それ自身を対象と見なすこともできる。函手間の矢を自然変換と呼ぶ(17)。

四、一般構文論の関係理論化２　圏による解釈

本論文において、『言語の論理的構文論』の原始的諸記号をトポスεで解釈し、初めて圏や函手やトポス等の関係の概念を用いて表す(18)。[1]各々の記号aに対して、U(a)はε対象である。[2]各々の関数定数 fu：$fu(a_1, \cdots, a_n)=a_{n+1}$ に対して、U(fu)は、$U(a_1)\times\cdots\times U(a_n)$ から $U(a_{n+1})$ へのε矢である。[3]各々の述語 $pr:pr(a_1, \cdots, a_n)$ に対して、U(pr)は、$U(a_1)\times\cdots\times U(a_n)$ の部分対象である。[4]各々の定数 c:a に対して、U(a)は矢 1→U(a)、即ちU(a)の大域的要素である。

$v=(v_1, \cdots, v_m)$ が、$v_i:a_i$ である、異なる諸変数の列であるならば、U(v)を $U(a_1)\times\cdots\times U(a_m)$ とする。v が諸変数の空である列であるならば、U(v)=1 とする。t が種類 a の用語であり、そして t の諸変数のすべてが v に生じるという意味において、$v=(v_1, \cdots, v_m)$ が t に適切である(appropriate)ならば、ε矢 $U^v(t)$：U(v)→U(a)は以下のように定義される。[1]t が変数 v_i であるならば、$U^v(t)$は射影矢 $U(v)\to U(a_i)$ である。[2]t が定数 c であるならば、$U^v(t)$は U(v)→1、U(c)：1→U(a)の合成である。[3]t が $fu(t_{i1}, \cdots, t_{in})$ であるならば（そしてその場合、$fu:fu(a_{i1}, \cdots, a_{in})=a$ である)、積の矢 $f:U(v)\to U(a_{i1})\times\cdots\times U(a_{in})$、$U(fu):U(a_{i1})\times\cdots\times U(a_{in})\to U(a)$ の合成として、$U^v(t)$を定義する。

『言語の論理的構文論』のタイプと段階については、トポスεに対して、トポスεの諸対象X、Yをタイプと見なし、各々のタイプに諸変数の系を導入する方法があると考える(19)。各々のタイプXに対して、タイプXの諸変数x、x’、…があり、各々の変数は、その解釈として、同一矢 1:X→X を持つ。タイプXの用語σは、その構成の中に、或る自由変数 y、z、w を持つ。それぞれのタイプが Y、Z、W であるならば、積対象 Y×Z×W は用語σの定義域と呼ばれ、σの解釈は、トポスεの矢σ：Y×Z×W→X である。これは『言語の論理的構文論』のタイプに相当すると考える。段階の概念は、函手それ自身を対象と見なす自然変換を繰り返すことによって、表現できる、と私は考える。

代入については、$v=(v_1, \cdots, v_m)$を、種類 a の用語 t に適切であるとする。u を v_i と同じ種類の用語とし、ǔ を用語 $t(v_i/u)$ に適切である列とする。$U|v_i/u|:U(\check{u})\to U(v)$ を積の矢 $(U^{\check{u}}(v_1),, U^{\check{u}}(v_{i-1}), U^{\check{u}}(u), U^{\check{u}}(v_{i+1}),, U^{\check{u}}(v_m))$ と定義する(20)。

論理結合子を関係の概念によって表す(21)。C を分類子⊤:1→Ωを持つトポスであるとする。[1]否定¬:Ω→Ωは、1→1、⊤:1→Ω、⊥:1→Ω、¬:Ω→Ωが C

における引き戻しであるような、唯一の C 矢である。この時、$\neg=\chi_{\perp}$であり、そしてその場合⊥自身は、!:0→1 の指標(character)である。[2]連言∩:Ω×Ω→Ωは、C において、積の矢<⊤,⊤>:1→Ω×Ωの指標である。[3]選言∪:Ω×Ω→Ωは、C 矢[$\langle\top_{\Omega}, 1_{\Omega}\rangle$,$\langle 1_{\Omega}, \top_{\Omega}\rangle$]:Ω+Ω→Ω×Ωの像の指標として定義される。[4]含意⇒:Ω×Ω→Ωは、e:≦→Ω×Ωの指標であり、そしてその場合、後者は∩:Ω×Ω→Ω、pr_1:Ω×Ω→Ωのイコライザ(equaliser、若しくは差分核)である。∩は連言の真理矢であり、pr_1は積Ω×Ωの第 1 の射影矢($pr_1(\langle x,y\rangle)=x$)である。イコライザについて補足する。すべての集合における並列する関数の対 f:A→B、g:A→B を与え、E を f と g とが一致する A の部分集合、すなわち E={x:x∈A and f(x)=g(x)}とする。包含関数 i:E→A は、f と g とのイコライザと呼ばれる。

以上のように、圏や函手やトポスによる、『言語の論理的構文論』の関係の理論としての初めての構成が示される。構文論の世界においては、語と語の相互関係を表す語から、更に語が導かれるのであるが、関係を排したそれ自体としては何物でもあり得ない、とも言える。

五、第三の無限の知恵の樹

カルナップの言語的時空的構築に、三つの無限の知恵の樹が構成できることを、本論文にて初めて示す。

第一は、空間についての考察を公式化するためにカルナップが構成した、『言語の論理的構文論』における不確定的言語Ⅱに存すると考える。つまり、無限の列を成す、或る同心円的な言語領域(konzentrische Sprachbezirke)II_1、II_2、…であると考える。言語Ⅰは言語II_1に含まれ、諸記号と文と導出に関して、すべての領域は、すべての継続的な領域に含まれる。言語Ⅱは、すべてのこれらの領域の合計である。領域II_n(n=2、3、…)において、述語と函手は段階 n まで、定数として、そして自由変数として生じるが、束縛変数として生じるのは、段階 n-1 までに過ぎない。例えば、概念「言語II_nにおいて分析的」は、任意の n に対して、構文論言語としての言語II_n自身において定義可能ではない。しかし、より拡張した領域II_{n+m}において、定義可能である。カルナップの空間論を公式化するための言語における、同心円的な無限の言語領域が、第一の無限の知恵の樹であると考える。前節にて示したように、論理的構文論は関係の理論として再構築できるので、無限の言語領域は、無限の樹状体系を成すと言えるからである。

第二は、第一節に詳述した、『言語の論理的構文論』の一般構文論における段階的体系、つまり空でない表現クラスの順序付けられた列であると考える。こ

の列の諸クラス、つまり段階は、ω、ω＋1、…と無限に続き、第二の無限の知恵の樹を構成すると考える。この段階の概念は、『世界の論理的構築』においては段階形式(Stufenform)として表れる。各々の段階の諸対象は、より低い段階の諸対象から構成され、その結果段階的な順序が生じる。すべての段階がその上に基礎付けられる基底(Basis)、一つの段階から次の段階への移行が実行される再起的な段階形式、その段階形式の繰り返しの応用によって構成される様々なタイプの諸対象の対象形式(Gegenstandsform)、様々な対象の種類の階層から生じる体系の全体形式の体系形式(Systemform)に分類される。任意の構成的体系において、基本対象の任意の集合から、任意の順序において、クラスと関係の構成を応用することによって、ますます多くの対象領域の段階的な構成を実行することができるならば、異なる範囲(sphäre)にあるこれらの領域は、構成的段階と呼ばれる。構成的段階は、諸対象を他の諸対象に基づいて構成することによって、構成的な体系内の階層的な順序をもたらす対象範囲(Gegenstandssphäre)である。これらの段階的体系が、第二の無限の知恵の樹を構成すると考える。

第三の無限の知恵の樹は、第一や第二の樹状体系と異なり、カルナップの文献上に全く記されていない。この隠れた知恵の樹、正確には樹状の束構造を持つ体系を、本論文にて初めて構成する。この第三の無限の知恵の樹とは、無数の理論の樹状体系を包摂するものであり、これを構成するには、先ず一般構文論を公理体系の構文論として解釈すること、次いで束論を用いることが要であると考える。

一般構文論において公理に該当するものは、文関数、原始文、そして導出の前提となる文クラス或いは帰結関係の前提となる文クラスである。これらの公理に該当するものから、形成規則と変換規則により導出され帰結する文関数や文のクラスを、理論と名付ける。一つの理論に含まれる諸公理を連結し、一つの公理 $P \equiv P_1 \wedge \cdots \wedge P_n$ とする(22)。P から導出されるすべての文関数や文の演繹的なクラスが、樹状体系における一つの理論である。

これらの諸理論は、束論の半順序関係で、束演算を用いて樹状に結合される。『知識表現』によれば、先ず、理論 A の諸公理が理論 B の諸公理に含まれるならば、理論 A と理論 B とは、諸理論の樹状体系の中で、束論における半順序関係(partial ordering)にあると定められる。理論 A の諸公理と理論 B の諸公理の選言の集まりから導出できるすべての文関数や文のクラスを、理論 A と理論 B の最小上界(supremum)と定める。理論 A の諸公理と理論 B の諸公理の連言の集まりから導出できるすべての文関数や文のクラスを、理論 A と理論 B の最大下界(infimum)と定める。空集合から導出されるトートロジーから成る理論を、最も上(top)に定め、整合性のない理論を、最も下(bottom)に定める。理論から幾

つかの公理を減じたり、或いは加えたりすることによって、理論は縮約され、或いは拡張されつつ、この諸理論の無限に分岐する樹状体系を上昇したり、或いは下降したりする。その結合術は無限であり、転変を繰り返す無数の理論の樹状体系が構成される。これが、カルナップの言語構築に秘められた、第三の無限の知恵の樹であると考える。以上により、無数の理論を内包し得る、三種類の隠れた無限の樹状体系が示される。虚空がすべてを内包し得るように、中空性を持つ形式的な象徴体系は、無数の理論を包摂することができる。カルナップの初期の著作における空間論、時空論が、彼の後の象徴体系の構築を基礎付けているというよりはむしろ、彼の象徴体系構築そのものが、無数の理論を包摂する思索空間の理論、即ち彼特有の空間論に他ならないのであると私は考える。

註

(1) Rudolf Carnap, *Logische Syntax der Sprache* (Wien: Verlag von Julius Springer, 1934); *The Logical Syntax of Language* (London: Routledge & Kegan Paul, 1937).
(2) Carnap, *Der Logische Aufbau der Welt* (Berlin-Schlachtensee: Weltkreis-Verlag, 1928).
(3) Paul Arthur Schilpp (ed.), *The Philosophy of Rudolf Carnap* (La Salle, Illinois: Open Court, 1963), pp. 3-56 参照。
(4) Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, pp. 106-202; *The Logical Syntax of Language*, pp. 153-275 参照。私は『言語の論理的構文論』を二回熟読し、『言語の論理的構文論』の第一部から第三部までについては、パソコンでＡ４用紙に８７頁に亘る要約を、第四部「一般構文論」については、手書きでルーズリーフに１２８頁に亘る要約を、論文作成のための資料として、２００４年９月から２００５年１月にかけて書いた。本論文の第一節は、その要約、その中でも特に第四部「一般構文論」の１２８頁に亘る要約を、更に圧縮し、本論文にて三種類の無限の知恵の樹を初めて構成するための、解釈の前提となるカルナップの基本文献として、あくまでも原典に忠実に再現し、提示するものである。
(5) Carnap, *Der Raum: Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre* (Berlin: Verlag von Reuther & Reichard, 1922).
(6) Carnap, “Über die Abhängigkeit der Eigenschaften des Raumes von denen der Zeit,” *Kant-Studien* (Berlin), Bd. 30, H. 3/4 (1925), pp. 331-45.
(7) Carnap, *Physikalische Begriffsbildung* (Karlsruhe: Verlag G. Braun,

1926).

(8) Jean-Baptiste Rauzy, “Sur l’Ontologie de l’Aufbau” in S. Laugier (éd.), *Carnap et la Construction Logique du Monde* (Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2001), pp. 111-33 参照。

(9) Carnap, *The Logical Syntax of Language*, §71a 参照。この節は、英訳版にのみ存在する。

(10) S. Eilenberg and S. Mac Lane, “Group extensions and homology,” *Annals of Mathematics*, 43 (1942), pp. 757-831; Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician* (2nd edn., New York: Springer-Verlag, 1998), p. 30 参照。

(11) Robert Goldblatt, *Topoi, The Categorial Analysis of Logic* (Revised edn., Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1984).

(12) Goldblatt, *Topoi, The Categorial Analysis of Logic*, p. 24-5 参照。

(13) Ibid., p.84 参照。

(14) Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, p. 106-7 では、冪乗を持つことを、カルテシアン閉であること、としている。

(15) William S. Hatcher, *The Logical Foundations of Mathematics* (Oxford: Pergamon Press, 1982), p. 237 参照。

(16) Goldblatt, *Topoi, The Categorial Analysis of Logic*, p. 194 参照。

(17) Mac Lane, *Mathematics, Form and Function* (New York: Springer-Verlag, 1986), p. 391 参照。

(18) この解釈は、Goldblatt, *Topoi, The Categorial Analysis of Logic*, p.484 によるものであるが、Michael Makkai and Gonzalo E. Reyes, *First Order Categorical Logic* (Berlin: Springer-Verlag, 1977), p. 78 等に、より詳細な解釈がある。

(19) Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory* (New York: Springer-Verlag, 1992), p.298 参照。

(20) Goldblatt, *Topoi, The Categorial Analysis of Logic*, p. 486 参照。

(21) Ibid., p. 139 参照。

(22) この樹状体系の構成は、以下の文献に基づく：George Grätzer, *General Lattice Theory* (New York: Academic Press, 1978), pp. 1-49; John F. Sowa, *Knowledge Representation: Logical, Philosophical, and Computational Foundations* (Pacific Grove: Brooks/Cole, 2000), pp. 1-123, 383-402; B. Z. Vulikh, *Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces* (Groningen: Wolters-Noordhoff Scientific Publications Ltd., 1967), pp. 1-43.